J. DÖRR · G. HOTZ

TAGUNGSBERICHT

AUTOMATENTHEORIE UND FORMALE SPRACHEN

mfo
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach · Berichte 3

Automatentheorie und formale Sprache

Bericht einer Tagung
des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach
Oktober 1969

HERAUSGEGEBEN VON

JOHANNES DÖRR
o. PROFESSOR FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT SAARBRÜCKEN

UND

GÜNTER HOTZ
o. PROFESSOR FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT SAARBRÜCKEN

BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM/WIEN/ZÜRICH
HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

ÜBER EINE REDUKTIONSMÖGLICHKEIT GEWISSER ÜBERDECKUNGSPROBLEME

von H. D. Ehrich in Hannover

ZUSAMMENFASSUNG

Die Zustandsreduktion unvollständiger deterministischer Automaten vereinfacht sich im Falle der "Typ-A-Automaten" von McCluskey [8] zu einem Überdeckungsproblem von spezieller Struktur. Solche "maximalen" Überdeckungen werden allgemein definiert, und es wird für diese ein Reduktionsverfahren hergeleitet. Eine hinreichende Bedingung für Reduzierbarkeit sowie eine obere Schranke für die Mächtigkeit einer Minimalüberdeckung werden angegeben.

EINLEITUNG

Als (endliche) "Überdeckung" werde eine Boole'sche Matrix ohne Nullspalten bezeichnet. Das Problem besteht darin, möglichst wenige Zeilen einer gegebenen Überdeckung so auszuwählen, daß die aus ihnen gebildete Matrix wiederum eine Überdeckung ist. Dies Problem tritt bekanntlich bei der Minimisierung Boole'scher Funktionen [7, 11] als sogenannte "Primterm-Minterm-Tabelle" auf, und es lassen sich noch weitere Fragestellungen z. B. der Automatentheorie und der Graphentheorie so formulieren [5, 8]. Von grundlegender Bedeutung bei der Bestimmung von Minimalüberdeckungen sind Reduktionstechniken, die es gestatten, die gegebene Überdeckung U in eine Überdeckung U' mit weniger Zeilen oder Spalten zu überführen, so daß Minimalüberdeckungen von U direkt aus Minimalüberdeckungen von U' herleitbar sind. Das bekannte Verfahren von Quine [11] und McCluskey [7] benutzt eine Reihe solcher Methoden, wie die Streichung dominierender Spalten, die Streichung dominierter Zeilen und die Elimination der Hauptterme ("core" in [11]). Gimpel [3] hat eine weitere Möglichkeit aufgezeigt, die genau dann anwendbar ist, wenn in der Überdeckung U eine Spalte mit genau zwei Einsen existiert.

Dieser Beitrag beschreibt eine Reduktionsmethode, die auf gewisse Überdeckungen anwendbar ist, welche einer Klasse von speziell strukturierten "maximalen" Überdeckungen angehören. Von diesem Typ sind etwa die bei McCluskey [8] bei der Minimisierung spezieller unvollständiger Automaten auftretenden Überdeckungen der Zustandsmenge durch maximale Verträglichkeitsmengen. Da, wie Gimpel [2] gezeigt hat, Primterm-Minterm-Tabellen Boole'scher Funktionen keine spezielle Struktur haben, entspricht auch jede maximale Überdeckung einem Minimisierungsproblem einer Boole'schen Funktion. Weitere Anwendungen für diesen Typ von Überdeckungsproblemen finden sich bei der Dekomposition partieller Boole'scher Funktionen [9, S. 252], bei Färbungen endlicher Graphen [6, S. 211] und bei der Zerlegung einer halbgeordneten Menge in möglichst wenige Ketten [6, S. 263]

1. ÜBERDECKUNGEN UND C-RELATIONEN

Eine Überdeckung ist eine Boole'sche Matrix ohne Nullspalten,

$$U = (u_i^k) \quad , \quad i \in [n] := \{1,2,\ldots,n\} \quad , \quad k \in [m] := \{1,2,\ldots,m\} \quad ,$$

wobei m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten von U bedeuten. Die Zeilen $u^k \in U$ und Spalten $u_i \in U$ werden als n- bzw. m-dimensionale Boole'sche Vektoren aufgefaßt. Mit B_n werde der Boole'sche Verband der n-dimensionalen Boole'schen Vektoren bezeichnet, dessen Verknüpfungen Addition, Multiplikation und Negation in gewohnter Weise komponentenweise erklärt sind. Die Bedingung dafür, daß U Überdeckung ist, lautet dann

$$\sum_{k=1}^{m} u^k = 1 \quad (:=(1,1,\ldots,1) \in B_n)$$

Zwei Überdeckungen U, V sind gleich, in Zeichen U=V, wenn sie bis auf eine Permutation der Zeilen übereinstimmen. Haben U und V die gleiche Anzahl von Spalten, so ist $U \leq V$ genau dann, wenn es zu jeder Zeile $u^k \in U$ eine Zeile $v^h \in V$ gibt mit $u^k \leq v^h$, d. h. $u^k \cdot v^h = u^k$ bzw. $u^k + v^h = v^h$. Die Relation $\leq$ ist reflexiv und transitiv. Die Matrix max U ist definiert durch:

(i) für zwei Zeilen $u^k, u^{k'} \in \max U$ gilt: $u^k \leq u^{k'} \Rightarrow k=k'$

(ii) zu jeder Zeile $u^{k^*} \in U$ gibt es eine Zeile $u^k \in \max U$ mit $u^{k^*} \leq u^k$.

Ist $U = \max U$ und $V = \max V$, so gilt:

$$U \leq V \wedge V \leq U \iff U = V$$

Sei Γ eine reflexive und symmetrische Relation auf $[n]$. Derartige Relationen werden im folgenden kurz C-Relationen genannt (C=compatible). Ein Boole'scher Vektor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in B_n$ heißt C-Vektor bzgl. Γ , wenn für $S := \{ i \in [n] \mid b_i = 1 \}$ gilt: $S \times S \subset \Gamma$; d. h. je zwei Indizes i,j mit $b_i = b_j = 1$ stehen in Relation Γ zueinander. U heißt C-Überdeckung bzgl. Γ , wenn jede Zeile von U C-Vektor bzgl. Γ ist. Ein C-Vektor $b^* \in B_n$ heißt maximal bzgl. Γ , wenn für jeden Vektor $b \in B_n$ gilt: ist b C-Vektor bzgl. Γ und $b^* \leq b$, so ist $b^* = b$.

DEFINITION 1: <u>Eine Überdeckung</u> U <u>heißt maximale C-Überdeckung bzgl.</u> Γ , <u>wenn gilt:</u>

(i) U <u>ist C-Überdeckung bzgl.</u> Γ

(ii) $U = \max U$

(iii) <u>für jede C-Überdeckung</u> V <u>bzgl.</u> Γ <u>ist</u> $V \leq U$.

Maximale C-Überdeckungen bzgl. einer C-Relation Γ werden im folgenden kurz maximale Überdeckungen genannt. Der Bezug auf Γ wird durch die Schreibweise $U = C(\Gamma)$ zum Ausdruck gebracht.

Eine C-Relation Γ wird durch eine Dreiecksmatrix

$$G^{\Delta} = \begin{pmatrix} g_{21} & & \\ g_{31} & g_{32} & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \cdot \\ g_{n1} & \cdots & g_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

dargestellt, wobei

$$g_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i,h) \in \Gamma \\ 0, & \text{wenn } (i,h) \notin \Gamma \end{cases} \qquad \text{für } i,h \in [n]$$

Die zu Γ komplementäre C-Relation $\overline{\Gamma}$ ist definiert durch

$$\overline{\Gamma} := ([n] \times [n] - \Gamma) \cup \{ (i,i) \mid i \in [n] \}$$

Die Darstellung $\overline{G^\Delta}$ von $\overline{\Gamma}$ erhält man dadurch, daß man G^Δ komponentenweise komplementiert.

Ordnet man die Komponenten von G^Δ zeilenweise hintereinander an, so erhält man die vektorielle Darstellung γ von Γ :

$$\begin{aligned}\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{\frac{n(n-1)}{2}}) \\ := (g_{21}, g_{31}, g_{32}, \ldots, g_{n,n-1})\end{aligned}$$

Die korrespondierenden Indizes von γ und G^Δ sind durch die folgenden Formeln auseinander zu berechnen: ist $\gamma_j \equiv g_{ih}$, so ist

$$j = j(i,h) = \frac{(i-1)(i-2)}{2} + h$$

und $$i = i(j) = \operatorname{entier}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2j - \frac{7}{4}}\right)$$

sowie $$h = h(j) = j - \frac{(i(j)-1)(i(j)-2)}{2}$$

DEFINITION 2: Seien $\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \ldots, \gamma_{j_r}$ die Nullkomponenten von γ und $j_o=0$. Dann ist

$$\Gamma_p := \Gamma \cup \{(i,h),(h,i) \mid j(i,h) > j_p\}$$

für $p=0,1,\ldots,r$ die zu Γ gehörige C-Relation p-ter Stufe.

Die vektorielle Darstellung γ_p von Γ_p geht aus γ dadurch hervor, daß alle Komponenten γ_j mit $j > j_p$ auf 1 gesetzt werden. Es ist $\Gamma_o = [n] \times [n]$ und $\Gamma_r = \Gamma$. Offenbar gilt: $\Gamma_p \supset \Gamma_{p'}$ für $0 \le p < p' \le r$.

LEMMA 1: Jeder C-Vektor $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in B_n$ bzgl. Γ_p ist C-Vektor bzgl. Γ_{p-1} für alle $p \in [r]$.

Beweis: Für $S := \{i \in [n] \mid b_i = 1\}$ ist $S \times S \subset \Gamma_p \subset \Gamma_{p-1}$ ∎

Folgende abkürzende Bezeichnungen werden eingeführt:
$C_p := C(\Gamma_p)$; $i_p := i(j_p)$; $h_p := h(j_p)$. Mit $e_i \in B_n$ sei derjenige Vektor bezeichnet, dessen i-te Komponente =1 ist und dessen übrige Komponenten =0 sind.

LEMMA 2: Ist $b=(b_1,b_2,\dots,b_n) \in B_n$ C-Vektor bzgl. Γ_{p-1} und $b'=b\cdot\overline{e_{i_p}}$ oder $b'=b\cdot\overline{e_{h_p}}$, so ist b' C-Vektor bzgl. Γ_p.

Beweis: Sei $b'=(b'_1,b'_2,\dots,b'_n)$, $S=\{i \in [n] \mid b_i=1\}$ und $T=\{i \in [n] \mid b'_i=1\}$. Nach Voraussetzung ist $S \times S \subset \Gamma_{p-1}$ und $b' \leq b$, woraus $T \times T \subset \Gamma_{p-1}$ folgt. Ferner ist $b'_{i_p}=0$ oder $b'_{h_p}=0$, so daß $\{i_p,h_p\} \not\subset T$ ist. Daraus folgt:
$T \times T \subset \Gamma_{p-1} - \{(i_p,h_p),(h_p,i_p)\} = \Gamma_p$ ∎

2. MAXIMALE ÜBERDECKUNGEN

Sei U eine maximale Überdeckung und Γ die zugeordnete C-Relation: $U=C(\Gamma)$. Sei μ_p die Anzahl der Zeilen in einer Minimalüberdeckung von C_p, und sei $\mathfrak{W}_p=\{V_g^p \mid g \in [s_p]\}$ die Menge aller Minimalüberdeckungen von C_p.

SATZ 1: Es ist $\mu_p=\mu_{p-1}$ genau dann, wenn ein $V_g^{p-1}=(v_i^k)$ $\in \mathfrak{W}_{p-1}$ existiert, so daß $|v_{i_p}+v_{h_p}|>1$ ist.
($|b|$=Anzahl der 1-Komponenten von b)

Beweis: Sei $\mu_p=\mu_{p-1}$ und $V_{g'}^p=(w_i^k)$, $g' \in [s_p]$, eine Minimalüberdeckung von C_p. Da $(e_{i_p}+e_{h_p}) \in B_n$ kein C-Vektor bzgl. Γ_p ist, ist $(e_{i_p}+e_{h_p}) \not\leq w^k$ für alle $k \in [\mu_p]$, und wegen der Überdeckungsbedingung muß $|w_{i_p}+w_{h_p}| \geq 2$ sein. Nach Lemma 1 ist $V_{g'}^p$ C-Überdeckung bzgl. Γ_{p-1}. Es gibt daher eine μ_p-zeilige Matrix V, deren Zeilen aus maximalen C-Vektoren bzgl. Γ_{p-1} bestehen, so daß $V_{g'}^p \leq V$ ist. Wegen $\mu_p=\mu_{p-1}$ ist $V \in \mathfrak{W}_{p-1}$, also $V=V_g^{p-1}$ für ein $g \in [s_{p-1}]$ und somit $V_{g'}^p \leq V_g^{p-1}$. Dann ist aber $|v_{i_p}+v_{h_p}| \geq |w_{i_p}+w_{h_p}| > 1$.

Sei nun $v_g^{p-1} \in \mathcal{W}_{p-1}$ mit $|v_{i_p} + v_{h_p}| > 1$. Dann gibt es Vektoren $b_1, b_2 \in B_{\mu_{p-1}}$ mit $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 \cdot b_2 = 0$, $b_1 \leq v_{i_p}$ und $b_2 \leq v_{h_p}$. Sei V die Matrix, die aus v_g^{p-1} dadurch entsteht, daß man die Spalte v_{i_p} durch b_1 und die Spalte v_{h_p} durch b_2 ersetzt. Dann ist V nach Lemma 2 C-Überdeckung bzgl. Γ_p, und es gibt eine μ_{p-1}-zeilige Überdeckung V', deren Zeilen maximale C-Vektoren bzgl. Γ_p sind, mit $V \leq V'$. Daher ist $\mu_p \leq \mu_{p-1}$. Da jede Minimalüberdeckung $v_{g'}^p \in \mathcal{W}_p$ C-Überdeckung bzgl. Γ_{p-1} ist, ist immer $\mu_{p-1} \leq \mu_p$ und somit $\mu_p = \mu_{p-1}$ ∎

Zu zwei Spaltenindizes $i,h \in [n]$ soll nun ein Operator φ_{ih} definiert werden, der eine Überdeckung $U=(u_i^k)$ in eine Menge von Überdeckungen überführt. Dazu seien die 1-Komponenten von $v := u_i \cdot u_h$ in aufsteigender Folge mit $k_1, k_2, \ldots, k_\delta$ indiziert. Sei

$$\beta_i = \begin{cases} 0, \text{ wenn } u_i \leq u_h \\ 1, \text{ wenn } u_i \nleq u_h \end{cases}$$

und sei
$$\beta_h = \begin{cases} 0, \text{ wenn } u_h \leq u_i \\ 1, \text{ wenn } u_h \nleq u_i \end{cases}$$

Ferner sei eine Menge B^{ih} von δ-dimensionalen Boole'schen Vektoren definiert durch:

$$B^{ih} := \begin{cases} B_\delta & \text{, wenn } \beta_i = \beta_h = 1 \\ B_\delta - \{0\} & \text{, wenn } \beta_i = 0,\ \beta_h = 1 \\ B_\delta - \{1\} & \text{, wenn } \beta_i = 1,\ \beta_h = 0 \\ B_\delta - \{0,1\} & \text{, wenn } \beta_i = \beta_h = 0 \end{cases}$$

Hierbei sind $0 := (0,0,\ldots,0)$ und $1 := (1,1,\ldots,1)$ das Null- bzw. Einselement des Verbandes B_δ.

DEFINITION 3: <u>Sei</u> $b = (b_1, b_2, \ldots, b_\delta) \in B^{ih}$ <u>und sei</u> U_b <u>die Überdeckung, die aus</u> U <u>entsteht, wenn man</u>

$$u_i^{k_q} \text{ \underline{durch} } b_q \text{ \underline{und} } u_h^{k_q} \text{ \underline{durch} } \overline{b_q}$$

ersetzt für alle $q \in [\delta]$. Dann ist

$$\varphi_{ih}(U) := \{ U_b \mid b \in B^{ih} \}.$$

Es folgt unmittelbar, daß $\delta = |u_i \cdot u_h|$ ist und $|\varphi_{ih}(U)| = 2^{\delta} + \beta_i + \beta_h - 2$. Es ist $\varphi_{ih}(U) = \emptyset$ genau dann, wenn $\delta = 1$ und $\beta_i = \beta_h = 0$, d. h. wenn $u_i = u_h$ und $|u_i| = |u_h| = 1$ ist.

Diese Definition soll nun auf endliche Mengen von Überdeckungen erweitert werden.

Sei $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_s\}$ eine Menge von n-spaltigen Überdeckungen mit der Eigenschaft $U_g = \max U_g$ für alle $g \in [s]$. Der Operator MAX überführt $\mathfrak{U}$ in eine Teilmenge $\mathrm{MAX}\,\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$, wobei gilt:

(i) für $U_g, U_{g'} \in \mathrm{MAX}\,\mathfrak{U}$ gilt: $U_g \leq U_{g'} \Rightarrow g = g'$

(ii) zu jeder Matrix $U_{g*} \in \mathfrak{U}$ gibt es eine Matrix $U_g \in \mathrm{MAX}\,\mathfrak{U}$ mit $U_{g*} \leq U_g$.

DEFINITION 4: Seien $i, h \in [n]$. Dann ist

$$\Phi_{ih}(\mathfrak{U}) := \mathrm{MAX} \bigcup_{g=1}^{s} \varphi_{ih}(U_g)$$

Wie oben seien $j_o = 0$ und j_p, $p \in [r]$, die Nullkomponenten der vektoriellen Darstellung γ der C-Relation Γ. Sei $\Phi_p := \Phi_{i_p h_p}$ und $\varphi_p := \varphi_{i_p h_p}$.

LEMMA 3: $\mu_p = \mu_{p-1} \iff \Phi_p(\mathfrak{V}_{p-1}) \neq \emptyset$

Beweis: $\Phi_p(\mathfrak{V}_{p-1})$ ist genau dann leer, wenn für alle $g \in [s_{p-1}]$ $\varphi_p(V_g^{p-1})$ leer ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn für $v_{i_p}, v_{h_p} \in V_g^{p-1}$ gilt: $|v_{i_p} + v_{h_p}| = 1$. Mit Satz 1 folgt die Behauptung ▮

SATZ 2: $\mu_p = \mu_{p-1} \Rightarrow \mathfrak{V}_p = \Phi_p(\mathfrak{V}_{p-1})$

Beweis: Sei $\mu_p = \mu_{p-1}$. Wegen Lemma 1 gibt es dann zu jedem $V_g^p \in \mathfrak{V}_p$ ein $V_{g'}^{p-1} \in \mathfrak{V}_{p-1}$ mit $V_g^p \leq V_{g'}^{p-1}$. Da $(i_p, h_p) \notin \Gamma_p$

ist, ist $(e_{i_p}+e_{h_p}) \nleq v^k \in V_g^p$ für alle $k \in [\mu_p]$, so daß nach Konstruktion des φ-Operators eine Überdeckung $V \in \varphi_p(V_{g'}^{p-1})$ existiert mit $V_g^p \leq V$. Zu V wiederum gibt es nach Definition 4 eine Überdeckung $V' \in \Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1})$ mit $V \leq V'$. Es ist also $V_g^p \leq V \leq V'$. Umgekehrt ist wegen Definition 4 und Lemma 2 jedes $V' \in \Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1})$ eine Überdeckung, deren Zeilen C-Vektoren bzgl. Γ_p sind. Es gibt daher (wegen $\mu_p = \mu_{p-1}$) ein $V_{g''}^p \in \mathfrak{M}_p$ mit $V' \leq V_{g''}^p$.

Aus $V_g^p \leq V'$ und $V' \leq V_{g''}^p$ folgt $V_g^p \leq V_{g''}^p$. Da die Zeilen jeder Überdeckung aus $\mathfrak{M}_p$ maximale C-Vektoren bzgl. Γ_p sind, kann nur die Gleichheit gelten: $V_g^p = V_{g''}^p$. Damit ist auch $V' = V_g^p$ und somit $\mathfrak{M}_p \subset \Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1})$. Da nach Definition 4 $\Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1}) = \mathrm{MAX}\ \Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1})$ ist, gibt es zu jedem $V' \in \Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1})$ ein $V_g^p \in \mathfrak{M}_p$ mit $V' = V_g^p$, woraus folgt:

$\Phi_p(\mathfrak{M}_{p-1}) \subset \mathfrak{M}_p$ ∎

3. DIE REDUKTION MAXIMALER ÜBERDECKUNGEN UND EINE ABSCHÄTZUNG FÜR μ

Gibt es ein $p^* \in [r]$ mit $\mu_{p^*} = \mu_{p^*+1} = \cdots = \mu_r =: \mu$, so braucht man das Überdeckungsproblem nur für C_{p^*} zu lösen und kann dann aus $\mathfrak{M}_{p^*}$ durch iterierte Anwendung von $\Phi_{p^*+1}, \Phi_{p^*+2}, \ldots, \Phi_r$ die Lösung $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_r$ von $C_r = U$ bestimmen. es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein solches p^* existiert.

LEMMA 4: $\mu_p \neq \mu_{p-1} \Rightarrow \mu_p = \mu_{p-1}+1$

Beweis: $\mu_p < \mu_{p-1}$ ist unmöglich, da man sonst eine Überdeckung aus μ_p Zeilen von C_{p-1} bilden kann, was der Minimalität von μ_{p-1} widerspricht; es ist also $\mu_p \geq \mu_{p-1}+1$. Sei $V_g^{p-1} \in \mathfrak{M}_{p-1}$ und A diejenige Matrix, die aus V_g^{p-1} durch

Ersetzen der i_p-ten Spalte durch den Nullvektor entsteht. Aus A entstehe die Matrix V durch Hinzufügen der Zeile $e_{i_p} \in B_n$. Dann ist V nach Lemma 2 eine C-Überdeckung bzgl. Γ_p mit $\mu_{p-1}+1$ Zeilen, woraus $\mu_p \leq \mu_{p-1}+1$ folgt ∎

LEMMA 5: <u>Sei</u> $V_g^{p-1}=(v_i^k) \in \mathfrak{W}_{p-1}$. <u>Ist</u> $|v_{i_p}| \geq 2$, <u>so ist</u> $\mu_p = \mu_{p-1}$, <u>und es gibt ein</u> $V_{g'}^p=(w_i^k) \in \mathfrak{W}_p$ <u>mit</u> $|w_{i_p}| \geq$ $\geq |v_{i_p}|-1$.

Beweis: Ist $|v_{i_p}| \geq 2$, so ist $|v_{i_p}+v_{h_p}| \geq 2$ und nach Satz 1 $\mu_p = \mu_{p-1}$. Seien $k_1,k_2,\dots,k_\delta \in [\mu_{p-1}]$ die Indizes der 1-Komponenten von $v_{i_p} \cdot v_{h_p}$, und sei $T=(t_i^k)$ die Matrix, die man aus V_g^{p-1} erhält, wenn man die Komponenten $v_{i_p}^{k_1}$ und $v_{h_p}^{k_q}$ für $q=2,3,\dots,\delta$ auf Null setzt. Dann ist $t_{i_p}^{k_1}=0$, $v_{i_p}^{k_1}=1$ und $t_{i_p}^k=v_{i_p}^k$ für $k \neq k_1$ und somit $|t_{i_p}|=|v_{i_p}|-1$. Nach Konstruktion ist $T \in \varphi_p(V_g^{p-1})$, und es gibt daher ein $V_{g'}^p=(w_i^k) \in \mathfrak{W}_p$ mit $T \leq V_{g'}^p$ (Definition 4 und Satz 2). Dann ist aber $|w_{i_p}| \geq |t_{i_p}| = |v_{i_p}|-1$ ∎

In der Darstellung G^Δ von Γ sei $\iota \in [n]-\{1\}$ ein fester Zeilenindex mit $\iota \leq i_r$ (d. h. es liegt noch mindestens eine Null in der ι-ten oder einer folgenden Zeile von G^Δ). Sei $p(\iota) \in [r]$ die kleinste Zahl, so daß $i_{p(\iota)} \geq \iota$ ist. Ferner sei ν^ι die Anzahl der p mit $i_p = i_{p(\iota)}$, so daß $i_{p(\iota)} = i_{p(\iota)+1} = \dots = i_{p(\iota)+\nu^\iota-1}$ ist. Dann gilt das folgende

KOROLLAR: <u>Für alle</u> α, $0 \leq \alpha \leq \min(\mu_{p(\iota)-1} - 1, \nu^\iota)$ <u>ist</u> $\mu_{p(\iota)+\alpha-1} = \mu_{p(\iota)-1}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $(i_{p(\iota)}, h) \in \Gamma_{p(\iota)-1}$ für alle $h \in [n]$. Für alle $V=(v_i^k) \in \mathfrak{W}_{p(\iota)-1}$ ist daher $|v_{i_{p(\iota)}}| = \mu_{p(\iota)-1}$. Wiederholte Anwendung von Lemma 5 ergibt die Behauptung ▮

Mit Hilfe dieser Ergebnisse läßt sich eine obere Schranke für die Anzahl μ der Zeilen einer Minimalüberdeckung der maximalen Überdeckung U angeben.

SATZ 3: $$\mu \leq \max_{2 \leq \iota \leq n} (\nu^{\iota}) + 1$$

Beweis: Durch vollständige Induktion über h wird gezeigt, daß für alle $h \in [i_r] - \{1\}$ gilt:

$$\mu_{p(h+1)-1} \leq \max_{2 \leq \iota \leq h} (\nu^{\iota}) + 1$$

Für $h < i_r$ ist $p(h+1)-1 = p(h)+\nu^h$. Setzt man daher $p(i_r+1)-1 := p(i_r)+\nu^{i_r} - r$, so ergibt sich für $h = i_r$ die Aussage des Satzes.

Für $h=2$ ist $p(3)-1=0$ oder $=1$, je nachdem $\gamma_1=1$ oder $=0$ ist. Im ersteren Falle ist $\mu_0=1$ und $\nu^2=0$, im letzteren $\mu_1=2$ und $\nu^2=1$. Damit ist der Induktionsanfang verifiziert. Es gelte die obige Ungleichung für $h-1 < i_r-1$. Nach dem Korollar zu Lemma 5 gilt für alle α, $0 \leq \alpha \leq \min(\mu_{p(h)-1}-1, \nu^h)$, daß $\mu_{p(h)+\alpha-1} = \mu_{p(h)-1}$ ist. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.) $\nu^h \leq \mu_{p(h)-1}$. Dann ist $\mu_{p(h+1)-1} =$

$$= \mu_{p(h)+\nu^h-1} = \mu_{p(h)-1} \leq \max_{2 \leq \iota \leq h-1} (\nu^{\iota}) + 1$$

$$\leq \max_{2 \leq \iota \leq h} (\nu^{\iota}) + 1$$

2.) $\nu^h > \mu_{p(h)-1}$. Nach Lemma 4 ist

$$\mu_{p(h)+\lambda} \leq \mu_{p(h)+\lambda-1} + 1$$

für alle $\mu_{p(h)-1} \leq \lambda \leq \nu^h$. Man erhält:

$$\mu_{p(h+1)-1} = \mu_{p(h)+\nu^h-1} \leq$$
$$\leq \mu_{p(h)-1} + (\nu^h - (\mu_{p(h)-1}-1)) = \nu^h + 1$$
$$\leq \max_{2\leq\iota\leq h} (\nu^\iota) + 1$$

In beiden Fällen folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung für h-1 deren Gültigkeit für h, womit der Satz bewiesen ist ∎

ν^ι ist definiert als die Anzahl der p mit $i_p = i_{p(\iota)}$, d. h. als die Anzahl von Nullen in der $i_{p(\iota)}$-ten Zeile von G^Δ. Bezeichnet man mit $g^2, g^3, \ldots, g^n$ die Zeilen von G^Δ, $g^\iota \in B_{\iota-1}$ für $\iota = 2,3,\ldots,n$, so ist demnach

$$\max_{2\leq\iota\leq n} (\nu^\iota) = \max_{\substack{2\leq\iota\leq n \\ |\overline{g^\iota}|\neq 0}} |\overline{g^\iota}|$$

Die Forderung $|\overline{g^\iota}|\neq 0$ bei der Bildung des Maximums auf der rechten Seite ist offenbar überflüssig, so daß sich folgende einfachere Abschätzung ergibt:

KOROLLAR: $\mu \leq \max\limits_{2\leq\iota\leq n} |\overline{g^\iota}| + 1$

Mit Hilfe dieser oberen Schranke läßt sich folgendes feststellen:

LEMMA 6: <u>Gibt es ein</u> $h \in [n]-\{1\}$ <u>mit</u>

$$\mu_{p(h)-1} \geq \max_{h\leq\iota\leq n} |\overline{g^\iota}| + 1 \quad ,$$

<u>so ist</u> $\mu_{p(h)-1} = \mu$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mu_{p(h)-1} - 1 \geq \nu^\iota$ für $h \leq \iota \leq n$. Aus dem Korollar zu Lemma 5 folgt dann: $\mu_{p(h)-1} =$
$= \mu_{p(h)+\nu^h-1} = \mu_{p(h+1)-1}$. Die Behauptung des Lemmas folgt nun durch Induktion nach h. (Es ist $\mu_{p(i_r+1)-1} := \mu$, s. Beweis zu Satz 3) ∎

Dies Lemma gibt eine hinreichende Bedingung für die hier betrachtete Reduzierbarkeit. Diese Bedingung ist jedoch nicht anwendbar, da die μ_p nicht von vornherein bekannt sind. Eine etwas schwächere, dafür jedoch praktikable hinreichende Bedingung erhält man, wenn man im Lemma den Wert $\mu_{p(h)-1}$ durch eine untere Schranke ersetzt. Eine brauchbare untere Schranke ist von S. Ginsburg [4] angegeben worden. Danach ist μ mindestens so groß wie die Anzahl der Elemente im betragsgrößten "maximum incompatible" von Γ: Sei $D=(d_i^k):=C(\overline{\Gamma})$ und $d(\overline{\Gamma}):=\max\limits_{d^k \in D} |d^k|$.

Dann besagt die Feststellung von Ginsburg: $\mu \geq d(\overline{\Gamma})$.
Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

SATZ 4: <u>Gibt es ein</u> $h \in [n]-\{1\}$ <u>mit</u>

$$d(\overline{\Gamma_{p(h)-1}}) > \max_{h \leq l \leq n} |\overline{g^l}| \quad ,$$

<u>so ist</u> $\mu = \mu_{p(h)-1}$.

4. EIN BEISPIEL

Die C-Relation Γ sei durch

$$G^{\Delta} = \begin{array}{r|l} 2 & 0 \\ 3 & 11 \\ 4 & 101 \\ 5 & 1101 \\ \hline & 1234 \end{array}$$

gegeben. Die zugehörige maximale Überdeckung $U=C(\Gamma)$ kann nach einem der in [10] beschriebenen Verfahren errechnet werden. Man erhält

$$U = \begin{pmatrix} 10110 \\ 10011 \\ 01100 \\ 01001 \end{pmatrix}$$

Auf die gleiche Art und Weise erhält man

$$D = C(\overline{\Gamma}) = \begin{pmatrix} 11000 \\ 01010 \\ 00101 \end{pmatrix}$$

Die untere Schranke von Ginsburg gibt $\mu \geq \max|d^k| = 2$. Eine geläufige obere Schranke ist $\mu \leq \min(m,n)$, in diesem Fall $\mu \leq 4$. Die obere Schranke nach dem Korollar zu Satz 3 ist

$$\mu \leq \max_{2 \leq \iota \leq 5} |\overline{g^{\iota}}| + 1 = \max(1,0,1,1) + 1 = 2 .$$

Der Index h=3 erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4: es ist $p(3)-1=1$ und $d(\overline{\Gamma_1})=2 > \max_{3 \leq \iota \leq 5} |\overline{g^{\iota}}| = 1$.

Hieraus folgt: $\mu = \mu_1$. Man erhält

$$C_1 = \begin{vmatrix} 10111 \\ 01111 \end{vmatrix} ,$$

und die einzige Minimalüberdeckung ist offenbar C_1 selbst:

$$\mathfrak{W}_1 = \{C_1\}$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{W}_2 = \Phi_2(\mathfrak{W}_1) = \Phi_{24}(\mathfrak{W}_1) = \left\{ \begin{vmatrix} 10111 \\ 01101 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_3 = \Phi_3(\mathfrak{W}_2) = \Phi_{35}(\mathfrak{W}_2) \quad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{W} = \left\{ \begin{vmatrix} 10110 \\ 01001 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 10011 \\ 01100 \end{vmatrix} \right\}$$

Dies sind sämtliche Minimalüberdeckungen von U.

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine Möglichkeit, gewisse maximale Überdeckungen zu reduzieren. Satz 4 gibt eine hinreichende Bedingung hierfür. Es sei abschließend darauf hingewiesen, daß nach diesem Kriterium nicht reduzierbare Überdeckungen unter Umständen in "äquivalente" reduzierbare überführt werden können; dem liegt die Überlegung zugrunde, daß die Anordnung der Spalten in einer Überdeckung keinen Einfluß auf die Zeilenauswahl für eine Minimalüberdeckung hat. Vertauscht man etwa in dem obigen Beispiel die 2. mit der 5. Spalte von U, so ergibt sich die Darstellung

$$G^{\Delta} = \begin{array}{c|l} 5 & 1 \\ 3 & 10 \\ 4 & 111 \\ 2 & 0110 \\ \hline & 1534 \end{array}$$

der zugeordneten C-Relation Γ, und man überzeugt sich leicht, daß hier keine Reduktion nach Satz 4 möglich ist. (Außerdem verschlechtert sich die obere Schranke für μ nach Satz 3.)

Es bleibt also das folgende Problem zu lösen: ist eine maximale Überdeckung U gegeben, so gebe man ein effektives Verfahren an, das in der Klasse der im obigen Sinne zu U äquivalenten Überdeckungen denjenigen Repräsentanten ermittelt, der nach Satz 4 die weitestgehende Reduktion zuläßt.

LITERATUR

1. Ehrich, H. D.: Zur Theorie und Anwendung endlicher Minimalüberdeckungen. Dissertation, Hannover (in Vorb.)
2. Gimpel, J. F.: A Method of Producing a Boolean Function Having an Arbitrarily Prescribed Prime Implicant Table. IEEE Trans. on Electr. Comp. EC-$\underline{14}$ (1965), 485-488
3. Gimpel, J. F.: A Reduction Technique for Prime Implicant Tables. IEEE Trans. on Electr. Comp. EC-$\underline{14}$ (1965), 535-541
4. Ginsburg, S.: A Technique for the Reduction of a Given Machine to a Minimal-State Machine. IRE Trans. on Electr. Comp. EC-$\underline{8}$ (1959), 346-355

5. Grasselli, A. and F. Luccio: Some Covering Problems in Switching Theory, in Biorci, G.(ed.): Network and Switching Theory, A NATO Advanced Study Institute, Trieste, Italy 1966. Academic Press, New York-London 1968

6. Hammer (Ivănescu), P. L. and S. Rudeanu: Boolean Methods in Operations Research. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968

7. McCluskey, E. J. Jr.: Minimization of Boolean Functions. Bell Sys. Tech. J. 35 (1956), 1417-1444

8. McCluskey, E. J. Jr.: Minimum-State Sequential Circuits for a Restricted Class of Incompletely Specified Flow Tables. Bell Sys. Tech. J. 41 (1962), 1759-1768

9. Miller, R. E.: Switching Theory. Vol. 1: Combinational Circuits. Wiley, New York-London-Sydney, 2nd printing 1966

10. Paull, M. C. and S. H. Unger: Minimizing the Number of States in Incompletely Specified Sequential Switching Functions. IRE Trans. on Electr. Comp. EC-8 (1959), 356-367

11. Quine, W. V.: The Problem of Simplifying Truth Functions. Amer. Math. Monthly 59 (1952), 521-531