Acta Informatica 2, 172—179 (1973)

Minimale und m-minimale Variablenmengen für partielle Boole'sche Funktionen

H.-D. Ehrich

Eingegangen am 12. April 1972

Summary. Systematic methods are presented for determining minimal and m-minimal sets of variables for partial boolean functions. This is done by constructing corresponding minimal covering problems.

1. Einleitung

Das Problem der Darstellung einer partiellen Booleschen Funktion f in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch eine minimalen Ausdruck in diesen n Variablen ist — unter Verwendung verschiedener Minimalitätskriterien — sehr häufig untersucht worden.

In dieser Arbeit soll eine andere Art der Minimisierung behandelt werden. Es geht darum, f durch möglichst wenige Variable aus der vorgegebenen Variablenmenge darzustellen. In der Anwendung auf Schaltkreise bedeutet dies, den Schaltkreis mit einer möglichst geringen Zahl äußerer Kontakte zu realisieren, und das ist für die Konstruktion von integrierten Schaltungen von einigem Interesse.

Diese Frage ist von Agibalov [1] und, unabhängig davon, von Akers [2] und DeVries [3] untersucht worden, wobei zwei verschiedene Minimalitätskriterien benutzt werden. In der ersteren Arbeit werden x und $\bar{x}$ als zwei Erscheinungsformen der gleichen Variablen x aufgefaßt, so daß also etwa $f = x + \bar{x}y$ durch diesen Ausdruck mit zwei Variablen dargestellt wird, während in den letzteren beiden Arbeiten x und $\bar{x}$ als zwei verschiedene Variable gezählt werden. Da sich jede partielle Boolesche Funktion f als monotone Funktion in den $2n$ „Variablen" $x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ auffassen läßt, läßt sich das letztere Minimalitätskriterium auf das erstere zurückführen mit der Einschränkung, daß f wieder monoton sein soll bezüglich der ausgewählten Variablenmenge.

Agibalov führt sein Minimisierungsproblem auf ein Minimalüberdeckungsproblem zurück. Hierin zeigt sich eine gewisse Analogie zum Quine-McCluskey-Verfahren [8, 9] zur Bestimmung zweistufiger Minimalausdrücke. Akers und DeVries geben in ihren Arbeiten kein systematisches Verfahren an, sondern nennen eine Reihe von Reduktionskriterien, nach denen man den Definitionsbereich einschränken (also mehr don't-cares hineinbringen) bzw. Variablen eliminieren kann.

In dieser Arbeit werden beide Minimalitätskriterien, Minimalität und m-Minimalität genannt, einheitlich abgehandelt, indem je ein korrespondierendes Minimalüberdeckungsproblem konstruiert wird, dessen Lösungen den minimalen bzw. m-minimalen Variablenmengen eineindeutig zugeordnet sind. Dabei erweist es sich, daß die Reduktionskriterien von Akers und DeVries als bekannte Reduktionsschritte für Primterm-Minterm-Tabellen im Quine-McCluskey-Verfahren interpretiert werden können.

Für die Lösung von Minimalüberdeckungsproblemen stehen bekannte Verfahren zur Verfügung [4—9].

2. Abhängigkeit von Variablen

Für $B=\{0, 1\}$ sei $f: B^n \to B$ eine partielle Boolesche Funktion (pBF). Jede pBF f läßt sich eindeutig durch die folgenden beiden Mengen charakterisieren:

$$X^i := \{x \in B^n \mid f(x) = i\}, \qquad i \in \{0, 1\}.$$

Je zwei Mengen $X^0, X^1 \subset B^n$ stellen offenbar auch eine pBF dar, sofern nur $X^0 \cap X^1 = \emptyset$ ist. Diese Darstellungsform wird durch die Schreibweise

$$f = (X^0, X^1)$$

ausgedrückt.

Die Funktion f hängt von einer Variablen x_k nicht wesentlich ab, wenn es einen Ausdruck gibt, der f darstellt, der aber weder x_k noch $\bar{x}_k$ enthält. Dies ist genau dann der Fall [3], wenn durch das Herausstreichen der x_k-Spalte aus der Wertetabelle für f wieder eine gültige Wertetabelle entsteht. Zur Präzisierung diene folgende Definition:

Definition 2.1. Seien $a, x \in B^n$ und $X \subset B^n$. Die Einskomponenten von a seien $a_{j1}, \ldots, a_{jp}$, wobei $1 \leqq j_i \leqq j_k \leqq n$ ist für $1 \leqq i \leqq k \leqq p$. Dann heißen

$$x_a := (x_{j1}, \ldots, x_{jp}) \in B^p$$

und

$$X_a := \{x_a \mid x \in X\} \subset B^p$$

die *a-Einschränkung von x* bzw. *X*.

Ist für $f = (X^0, X^1)$ und $a \in B^n$ der Durchschnitt $X_a^0 \cap X_a^1$ leer, so existiert die pBF

$$f_a := (X_a^0, X_a^1),$$

welche entsprechend *a-Einschränkung von f* genannt wird. f ist genau dann unabhängig von der mit den Nullkomponenten von a korrespondierenden Menge von Variablen, wenn die a-Einschränkung f_a von f existiert.

Beispiel.

(1)

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
X^0	0	0	0	1	0
	1	1	1	0	0
X^1	0	1	0	1	1
	0	1	0	0	1
	1	0	0	0	1

(2)

x_2	x_3	x_4	$f_{(0,1,1,1)}$
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	0	0	1

(3)

x_1	x_2	$f_{(1,1,0,0)}$
0	0	0
1	1	0
0	1	1
1	0	1

Sei f gegeben durch die Tabelle (1). Die (0, 1, 1, 1)-Einschränkung existiert (Tabelle (2)), kann aber nicht weiter eingeschränkt werden. Gleichwohl existiert eine a-Einschränkung mit zwei Variablen, nämlich für $a=(1, 1, 0, 0)$ (Tabelle (3)). Das Problem läßt sich also nicht dadurch lösen, daß man unabhängige Variable in beliebiger Reihenfolge herausstreicht.

3. Minimale Variablenmengen

Sei $\xi := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ die Menge der Variablen. Mit ξ_a bezeichnen wir sinngemäß die Teilmenge der mit den Einskomponenten von $a \in B^n$ korrespondierenden Variablen.

Definition 3.1. ξ_a heißt *hinreichende Variablenmenge von* f genau dann, wenn $X_a^0 \cap X_a^1 = \emptyset$ ist. Eine *minimale Variablenmenge von* f ist eine hinreichende Variablenmenge von f mit minimaler Mächtigkeit.

Ist $X \subset B^n$ eine Menge Boolescher Vektoren, so bezeichnen wir mit $[X]$ die Klasse aller Matrizen, deren Menge von Spaltenvektoren X ist. Wir nennen $[X]$ wiederum eine Matrix und ignorieren es also, wenn die Spalten permutiert, Spalten mehrfach hingeschrieben oder mehrfach auftretende Spalten herausgestrichen werden.

Definition 3.2. $[X]$ heißt eine *Überdeckung* genau dann, wenn $0 \notin X$ ist.

Für $x, y \in B^n$ seien xy, $x+y$ und $\bar{x}$ die komponentenweise Konjunktion, Disjunktion bzw. Negation Boolescher Vektoren.

Definition 3.3. Sei $f=(X^0, X^1)$ eine pBF und $a \in B^n$. Die *U_a-Matrix von f* ist definiert durch

$$U_a(f) := [\{y \oplus z \mid y \in X_a^0 \wedge z \in X_a^1\}],$$

wobei $y \oplus z := y\bar{z} + \bar{y}z$ die Antivalenz ist.

Der folgende recht einfache Satz geht auf Agibalov [1] zurück.

Satz 3.1. ξ_a ist genau dann eine hinreichende Variablenmenge von f, wenn $U_a(f)$ eine Überdeckung ist.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Beziehung

$$\bigwedge_{y \in X_a^0} \bigwedge_{z \in X_a^1} y \oplus z \neq 0 \Leftrightarrow X_a^0 \cap X_a^1 = \emptyset.$$

Den Variablen in ξ_a sind eindeutig die Einskomponenten von a, und diesen wiederum die Zeilen von $U_a(f)$ zugeordnet. Die Matrix

$$U(f) := U_1(f)$$

gehört dann zur Menge ξ aller Variablen, und $U_a(f)$ kann man sich aus $U(f)$ dadurch entstanden denken, daß alle zu Nullkomponenten von a gehörenden Zeilen herausgestrichen worden sind. Bezeichnen wir diejenigen Überdeckungen, die wir solchermaßen aus $U(f)$ bekommen können und die eine minimale Anzahl von Zeilen haben, als Minimalüberdeckungen von $U(f)$, so können wir aus dem obigen Satz die folgende Schlußfolgerung ziehen:

Korollar 3.1. Die minimalen Variablenmengen von f korrespondieren eineindeutig mit den Minimalüberdeckungen von $U(f)$.

4. m-minimale Variablenmengen

Auf B^n erklären wir eine Halbordnungsrelation $\leqq$ durch $x \leqq y :\Leftrightarrow xy = x$ ($\Leftrightarrow x + y = y$). Eine pBF f von B^n in B heißt dann *monoton*, wenn gilt:

$$x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y)$$

für alle x, y aus dem Definitionsbereich von f. Für die Darstellung $f = (X^0, X^1)$ ist f genau dann monoton, wenn für alle $y \in X^0$ und $z \in X^1$ gilt: $z \nleqq y$.

Wir suchen nach Variablenmengen ξ_a, mit deren Hilfe sich eine gegebene monotone Funktion wieder monoton darstellen läßt und wollen zeigen, daß diese Variablenmengen eineindeutig mit Überdeckungen der Form $M_a(f)$ korrespondieren.

Sei $f = (X^0, X^1)$ monoton und $a \in B^n$.

Definition 4.1. ξ_a heißt *m-hinreichende Variablenmenge von f* genau dann, wenn $X_a^0 \cap X_a^1 = \emptyset$ und $f_a = (X_a^0, X_a^1)$ monoton ist. Eine *m-minimale Variablenmenge von f* ist eine m-hinreichende Variablenmenge von f mit minimaler Mächtigkeit.

Definition 4.2. Die *M_a-Matrix von f* ist definiert durch

$$M_a(f) := [\{\bar{y} z \mid y \in X_a^0 \wedge z \in X_a^1\}].$$

Durch ihre M_a-Matrizen lassen sich monotone Funktionen und ihre m-hinreichenden Variablenmengen folgendermaßen charakterisieren:

Satz 4.1. Sei $f = (X^0, X^1)$ eine pBF und $a \in B^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) f_a ist eine monotone pBF.

(b) $M_a(f)$ ist eine Überdeckung.

(c) ξ_a ist eine m-hinreichende Variablenmenge von f.

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(b). Sei $M_a(f) = [V_a(f)]$. Dann gilt die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& f_a \text{ ist eine monotone pBF} \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in X_a^0} \bigwedge_{z \in X_a^1} z \nleqq y \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{y \in X_a^0} \bigwedge_{z \in X_a^1} \bigvee_{i=1}^{n} (z_i = 1 \wedge y_i = 0) \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{v \in V_a(f)} \bigvee_{i=1}^{n} v_i = 1 \\
& \Leftrightarrow \bigwedge_{v \in V_a(f)} v \neq 0 \\
& \Leftrightarrow 0 \notin V_a(f) \\
& \Leftrightarrow M_a(f) \text{ ist eine Überdeckung.}
\end{aligned}$$

(b)$\Leftrightarrow$(c). Dies folgt aus der Beziehung

$$\bigwedge_{y \in X_a^0} \bigwedge_{z \in X_a^1} (\bar{y} z \neq 0 \Leftrightarrow z \nleqq y).$$

Dieser Satz ist das Analogon zu Satz 3.1. Offenbar ist, wenn $M_a(f)$ eine Überdeckung ist, auch $U_a(f)$ eine Überdeckung. Die Umkehrung gilt i. allg. nicht. Für

$$M(f) := M_1(f)$$

folgern wir entsprechend zum vorigen Abschnitt:

Korollar 4.1. Die m-minimalen Variablenmengen von f korrespondieren eineindeutig mit den Minimalüberdeckungen von $M(f)$.

5. Ein Beispiel

Wir betrachten das Beispiel aus Abschnitt 2.

$$X^0 = \{y^0, y^1\}, \quad y^0 = (0, 0, 0, 1), \quad y^1 = (1, 1, 1, 0)$$
$$X^1 = \{z^0, z^1, z^2\}, \quad z^0 = (0, 1, 0, 1), \quad z^1 = (0, 1, 0, 0),$$
$$z^2 = (1, 0, 0, 0).$$

$U(f) =$

	$y^0 \oplus z^0$	$y^0 \oplus z^1$	$y^0 \oplus z^2$	$y^1 \oplus z^0$	$y^1 \oplus z^1$	$y^1 \oplus z^2$
x_1	0	0	1	1	1	0
x_2	1	1	0	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	1
x_4	0	1	1	1	0	0

Die einzige Minimalüberdeckung von $U(f)$ besteht aus den ersten beiden Zeilen, so daß also für $a = (1, 1, 0, 0)$

$$\xi_a = \{x_1, x_2\}$$

die einzige minimale Variablenmenge von f ist.

Nun fassen wir f als monotone Funktion der acht „Variablen" $x_1, \ldots, x_4$, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_4$ auf und bestimmen die m-minimalen Variablenmengen von f.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$	f
y^0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
y^1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
z^0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
z^1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
z^2	1	0	0	0	0	1	1	1	1

$M(f) =$

	$\bar{y}^0 z^0$	$\bar{y}^0 z^1$	$\bar{y}^0 z^2$	$\bar{y}^1 z^0$	$\bar{y}^1 z^1$	$\bar{y}^1 z^2$
x_1	0	0	1	0	0	0
x_2	1	1	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	1	0	0
$\bar{x}_1$	0	0	0	1	1	0
$\bar{x}_2$	0	0	0	0	0	1
$\bar{x}_3$	0	0	0	1	1	1
$\bar{x}_4$	0	1	1	0	0	0

Bilden wir die Disjunktion aus der unteren und der oberen Hälfte von $M(f)$, so erhalten wir $U(f)$.

$M(f)$ hat zwei Minimalüberdeckungen, jede bestehend aus drei Zeilen. Die entsprechenden m-minimalen Variablenmengen von f sind

$$\xi_b^m = \{x_1, x_2, \bar{x}_3\} \quad \text{und} \quad \xi_c^m = \{x_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$$

für $b=(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ und $c=(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$.

Zum Beispiel können wir f durch folgende Ausdrücke darstellen:

1) $f = x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2$ (mit minimaler Variablenmenge)

bzw.

2) $f = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \bar{x}_4$ (mit m-minimaler Variablenmenge).

6. Die Kriterien von Akers und DeVries

Von Akers [2] und DeVries [3] sind zur Vereinfachung monotoner Funktionen Kriterien angegeben worden, und zwar zur Verkleinerung der Mengen X^0 und X^1 einerseits („Zeilenkriterien") und zur Elimination von Variablen andererseits („Spaltenkriterien"). Durch das korrespondierende Minimalüberdeckungsproblem lassen sich diese Kriterien auf bekannte Reduktionsschritte des Quine-McCluskey-Verfahrens zurückführen, nämlich auf das Streichen dominierender Spalten bzw. dominierter Zeilen von $M(f)$.

Das Zeilenkriterium von Akers besagt: sind $y, y' \in X^0$ und $y \leqq y'$, so kann y aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, d. h. man braucht nur $X^0 - \{y\}$ zu betrachten. Entsprechend kann z' aus X^1 herausgenommen werden, wenn $z \leqq z'$ ist für ein $z \in X^1$.

Satz 6.1. Kann $y(z')$ aufgrund des Zeilenkriteriums von Akers aus $X^0(X^1)$ herausgenommen werden, so können alle Spalten von $M(f)$, an deren Bildung $y(z')$ beteiligt ist, als dominierend gestrichen werden.

Beweis. Seien $y, y' \in X^0$ und $z, z' \in X^1$. Ist $y \leqq y'$, so ist $\bar{y}' z \leqq \bar{y} z$ für alle $z \in X^1$. Entsprechend folgt aus $z \leqq z'$, daß $\bar{y} z \leqq \bar{y} z'$ ist für alle $y \in X^0$.

DeVries hat zwei Spaltenkriterien angegeben. Das erste besagt: gibt es einen Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ so, daß für die k-ten Komponenten y_k aller Vektoren $y \in X^0$ gilt: $y_k = 1$, oder daß für die k-ten Komponenten z_k aller Vektoren $z \in X^1$ gilt: $z_k = 0$, so kann die Variable x_k eliminiert werden. Da in diesem Falle alle $\bar{y}_k = 0$ oder alle $z_k = 0$ sind, gehört zu x_k eine Nullzeile in $M(f)$. Die Umkehrung gilt offenbar auch, so daß wir zusammenfassen können:

Satz 6.2. In $M(f)$ gehört zu einer Variablen x_k genau dann eine Nullzeile, wenn x_k aufgrund des ersten Spaltenkriteriums von DeVries eliminiert werden kann.

Das zweite Spaltenkriterium von DeVries erlaubt die Elimination einer Variablen x_j durch eine andere Variable x_i, und zwar nach der Regel: gelten für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $y \in X^0$, $z \in X^1$ die Implikationen

$$y_i = 1 \Rightarrow y_j = 1$$

und

$$z_j = 1 \Rightarrow z_i = 1,$$

so kann x_j (durch x_i) eliminiert werden.

Dies Kriterium entspricht dem Streichen dominierter Zeilen in $M(f)$. Sei $\hat{x}_k$ die zur Variablen x_k gehörende Zeile von $U(f)$, als Boolescher Vektor betrachtet. Die Zeile $\hat{x}_i$ dominiert dann die Zeile $\hat{x}_j$, wenn $\hat{x}_j \leqq \hat{x}_i$ ist.

Satz 6.3. Sei x_j eine Variable, die nicht durch das erste Spaltenkriterium von DeVries eliminiert werden kann ($\hat{x}_j \neq 0$). Dann gilt: x_j kann genau dann durch eine andere Variable x_i aufgrund des zweiten Spaltenkriteriums von DeVries eliminiert werden, wenn in $M(f)$ gilt: $\hat{x}_j \leqq \hat{x}_i$.

Beweis. Zu zeigen ist die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen (1) und (2) für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\bigwedge_{y \in X^0} \bigwedge_{z \in X^1} (y_i = 1 \Rightarrow y_j = 1) \wedge (z_j = 1 \Rightarrow z_i = 1). \tag{1}$$

$$\bigwedge_{y \in X^0} \bigwedge_{z \in X^1} (\bar{y} z)_j = 1 \Rightarrow (\bar{y} z)_i = 1. \tag{2}$$

Hierbei ist $(\bar{y}z)_j$ die j-te Komponente des Vektors $\bar{y}z$. Die Implikation (1) ⇒ (2) folgt einfach aus der Äquivalenz

$$(y_j = 1 \Rightarrow y_j = 1) \Leftrightarrow (\bar{y}_j = 1 \Rightarrow \bar{y}_i = 1).$$

Um die Umkehrung (2) ⇒ (1) zu zeigen, sei $y \in X^0$ mit $\bar{y}_j = 1$. Wegen der Voraussetzung $\hat{x}_j \neq 0$ gibt es ein $z \in X^1$ mit $z_j = 1$. Wegen (2) muß dann $\bar{y}_i = 1$ sein, d.h. für alle $y \in X^0$ gilt:

$$\bar{y}_j = 1 \Rightarrow \bar{y}_i = 1 \quad \text{bzw.} \quad y_i = 1 \Rightarrow y_j = 1.$$

Sei nun $z \in X^1$ mit $z_j = 1$. Wegen $\hat{x}_j \neq 0$ gibt es ein $y \in X^0$ mit $\bar{y}_j = 1$, und aus (2) folgt wie oben $z_i = 1$. Also gilt für alle $z \in X^1$: $z_j = 1 \Rightarrow z_i = 1$.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß durch das Streichen dominierender Spalten in der Überdeckungsmatrix $M(f)$ alle die Vektoren $y \in X^0$ und $z \in X^1$ von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden, die auch durch das Zeilenkriterium von Akers eliminiert werden würden. Durch das Streichen dominierter Zeilen in $M(f)$ werden genau die Variablen eliminiert, die durch die beiden Spaltenkriterien von DeVries eliminiert werden würden. Aus der Theorie der Minimalüberdeckungen weiß man allerdings, daß durch diese letztere Maßnahme möglicherweise Lösungen verlorengehen können, daß man also nicht unbedingt mehr alle m-minimalen Variablenmengen von f findet.

7. Schlußbemerkungen

Wir haben systematische Methoden beschrieben, minimale und m-minimale Variablenmengen für partielle Boolesche Funktionen zu gewinnen. Hat man eine (m-)minimale Variablenmenge ξ_a für f gefunden, so möchte man ggf. noch einen möglichst einfachen Ausdruck in den Variablen aus ξ_a haben, der f darstellt. Dies kann durch eine der geläufigen Methoden, etwa durch das Quine-McCluskey-Verfahren [8, 9], geschehen. Hierbei kann es nun vorkommen, daß die minimale zweistufige Form für f bezüglich aller Variablen aus ξ einfacher ist als die minimale zweistufige Form für f bezüglich ξ_a. Ein Beispiel für diesen Effekt im monotonen Fall gibt DeVries in [2], und er gibt dort Sätze an, wann die Elimination einer Variablen „minimalitätserhaltend“ ist, d.h. die Bildung einer minimalen zweistufigen Form nicht verhindert. In der Sprache des korrespondierenden Minimalüberdeckungsproblems lassen sich die diesbezüglichen Ergebnisse von De Vries dahingehend zusammenfassen, daß die Elimination einer Variablen durch Streichen einer dominierten Zeile von $M(f)$ minimalitätserhaltend ist.

Literatur

1. Agibalov, G. P.: Minimizing the number of arguments of Boolean functions. In: Synthesis of digital automata, Lazarev, V. G., Zakrevskii, A. D., eds., p. 87—91. New York-London: Consultants Bureau 1969.
2. Akers, S. B., Jr.: A truth table method for the synthesis of combinational logic. IRE Trans. Electron. Comput. EC-**10**, 604—615 (1961).
3. De Vries, R. C.: Minimal sets of distinct literals for a logically passive function. Journal of the ACM, **18**, 431—443 (1971).
4. Ehrich, H.-D.: Zur Theorie und Anwendung endlicher Minimalüberdeckungen, Dissertation, Technische Universität Hannover 1970.
5. Ehrich, H.-D.: Über eine Reduktionsmöglichkeit gewisser Überdeckungsprobleme, In: Automatentheorie und formale Sprachen, J. Dörr, G. Hotz, Hrsg., S. 477—492. Mannheim: Bibliographisches Institut 1970.
6. Grasselli, A., Luccio, F.: Some covering problems in switching theory. In: Network and switching theory (G. Biorci, ed.), p. 536—557. New York: Academic Press 1968.
7. House, R. W., Nelson, L. D., Rado, T.: Computer studies of a certain class of linear integer problems. In: Recent advances in optimization techniques (A. Lavi, T. P. Vogl, eds.), p. 241—280. New York: Wiley 1966.
8. McCluskey, E. J.: Minimization of Boolean functions. Bell Syst. Tech. J. **35**, 1417—1444 (1956).
9. Quine, W. V.: The problem of simplifying truth functions. Amer. Math. Monthly 59, 521—531 (1952).

Dr. Hans-Dieter Ehrich
Institut für Informatik
und Praktische Mathematik
der Universität Kiel
D-2300 Kiel
Olshausenstraße 40—60
Bundesrepublik Deutschland

Universitätsdruckerei H. Stürtz AG Würzburg
Printed in Germany