K. Pape, editor, Graphensprachen und Algorithmen auf Graphen, Appl. Comp. Sc. 1, pages 143–161, München, 1976. Hanser–Verlag

Ein axiomatischer Ansatz für eine Algebra strukturierter Objekte

H.-D. Ehrich, Universität Dortmund

1. Einleitung

Die "Vienna Definition Language" [1,3,6] ist ein sehr allgemein verwendbarer Kalkül zur Beschreibung der Syntax und Semantik von Programmiersprachen sowie zur Darstellung von Datenstrukturen und von Operationen auf Datenstrukturen [2,4]. Wegner [6] und Ollongren [5] haben Ansätze zur axiomatischen Begründung dieses Kalküls gemacht. Ollongren beschränkt sich auf endliche Objekte. Bei Wegner wird der μ-Operator als eine grundlegende Operation aufgefaßt, was der grundlegenden Bedeutung dieses Operators in der Wiener Methode entspricht.

Der μ-Operator ist eine relativ komplizierte dreistellige Verknüpfung. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie er sich aus drei zweistelligen Verknüpfungen zusammensetzen läßt, der "Summe", der "Konstruktion" und der "Amputation". Die Amputation wiederum läßt sich zurückführen auf die zweistelligen Verknüpfungen "Selektion" und "Konstruktion".

Als grundlegend werden daher im vorliegenden Axiomensystem die Verknüpfungen "Summe", "Selektion" und "Konstruktion" betrachtet. Dadurch werden einige Parallelen zu geläufigen algebraischen Strukturen sichtbar. Darüberhinaus ergibt sich eine natürliche Erweiterung und Verallgemeinerung des Konzepts der Wiener Objekte : das Standard-Modell für die hier beschriebene "Objekt-Algebra" ist die Menge der (evtl. unendlichen) Wurzelbäume endlichen Grades mit markierten Kanten und Blättern, wobei die Menge der Kantenmarkierungen ("Selektoren") endlich ist und die Blattmarkierungen Elemente einer Halbgruppe sind, als solche also verknüpft werden können. Die von einem Knoten ausgehenden Selektoren müssen paarweise verschieden sein.

Daneben werden weitere Beispiele für Objekt-Algebren angegeben, linguistische und algebraische. Linguistische

Beispiele sind Familien von Präfix-Sprachen mit gewissen Abschluß-eigenschaften, und algebraische Beispiele sind bestimmte Monoide, auf denen Endomorphismen-Monoide mit speziellen Eigenschaften operieren.

Eine sehr wichtige Unterstruktur einer Objekt-Algebra bilden die "endlichen Objekte", welche den endlichen Bäumen entsprechen. Im letzten Abschnitt werden die endlichen Objekte und deren Unterstrukturen vollständig charakterisiert durch das Monoid der elementaren Objekte (Blattmarkierungen) und dessen Unter-Monoide .

2. Das Axiomensystem und einfache Folgerungen

Sei $\mathfrak{D}=(D,+,0)$ ein kommutatives Monoid. 0 ist das neutrale Element. Die Elemente von D heißen Objekte, und 0 heißt das Nullobjekt. Sei S eine endliche Menge. Die Elemente von S heißen Selektoren.

Seien $\circ$ und $*$ zwei Verknüpfungen von $S \times D$ in D. $\circ$ heißt Selektion, und $*$ heißt Konstruktion. Für das Ergebnis einer Verknüpfung des Selektors $s \in S$ mit dem Objekt $a \in D$ verwenden wir die Schreibweise

$a \circ s$ für die Selektion
$s * a$ für die Konstruktion

Die Verknüpfungen werden folgendermaßen auf Worte über S erweitert:

$$a \circ sx := (a \circ s) \circ x \qquad xs * a := x * (s * a) \qquad \text{für alle } a \in D,\ s \in S \text{ und } x \in S^*$$

Für das leere Wort ε setzen wir $a \circ \varepsilon := a$ und $\varepsilon * a := a$ für alle $a \in D$.

Definition 2.1 : Ein Objekt $a \in D$ heißt elementar genau dann, wenn für alle $s \in S$ gilt: $a \circ s = 0$.

Sei E die Menge der elementaren Objekte, und sei $A := D - E$. Die Menge $A_0 := A \cup \{0\}$ heißt die Menge der zusammengesetzten Objekte.

Definition 2.2 : Sei $a \in D$. Die charakteristische Menge $\chi(a)$ von a ist

$$\chi(a) := \{ x \in S^* \mid a \circ x \neq 0 \}$$

Die elementar-charakteristische Menge $\chi_E(a)$ von a ist

$$\chi_E(a) := \{ x \in \chi(a) \mid a \circ x \in E \}$$

Definition 2.3 : Eine Objekt-Algebra ist ein Sextupel $\Omega = (D,S,+,\circ,*,0)$ mitfolgenden Axiomen:

Ax1 : $\vartheta := (D,+,0)$ ist ein kommutatives Monoid

Ax2 : $\forall a,b \in D \quad : \quad a+b = 0 \Rightarrow a=b=0$

Ax3 : $\forall s \in S \quad : \quad s * 0 = 0$

Ax4 : $\forall s \in S \ \forall a,b \in D : \quad (a+b)\circ s = a\circ s + b\circ s$

Ax5 : $\forall s,t \in S \ \forall a \in D : \quad (s*a)\circ t = (s=t \rightarrow a, \ T \rightarrow 0)$

Ax6 : $\forall a,b \in D : \quad (\chi(a) = \chi(b) \wedge \forall x \in \chi_E(a) : a\circ x = b\circ x)$
$\Rightarrow \quad a = b$

Bevor wir einige Modelle für dies Axiomensystem betrachten, leiten wir eine Reihe von grundlegenden Beziehungen her.

Satz 2.4 : $\forall a,b \in A : (\forall s \in S : a\circ s = b\circ s) \Rightarrow a = b$

Beweis: Wegen $a \in A$ gibt es ein $y \in \chi(a)$ mit $y \neq \varepsilon$. Sei $y=sx$ für ein $s \in S$ und ein $x \in S^*$. Dann gilt:

$$sx \in \chi(a) \Leftrightarrow a \circ sx = (a\circ s)\circ x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \chi(a\circ s) \Leftrightarrow x \in \chi(b\circ s)$$
$$\Leftrightarrow (b\circ s)\circ x = b \circ sx \neq 0 \Leftrightarrow sx \in \chi(b)$$

Daraus folgt: $\chi(a) = \chi(b)$. Sei nun $y \in \chi_E(a)$. Wegen $a \in A$ ist $y \neq \varepsilon$. Sei $y=sx$ für ein $s \in S$ und ein $x \in S^*$. Dann gilt:

$$a\circ y = a\circ sx = (a\circ s)\circ x = (b\circ s)\circ x = b\circ sx = b\circ y$$

Daraus folgt: $\forall y \in \chi_E(a) : \quad a\circ y = b\circ y$. Aus Ax6 folt $a = b$.

Satz 2.5 :
(i) $0 \in E$
(ii) $\forall e,e' \in E : \quad e+e' \in E$
(iii) $\forall e \in E \ \forall a \in A : \quad a+e = a$
(iv) $\forall a,b \in D : \quad (a \in A \Rightarrow a+b \in A)$
(v) $\forall x \in S^* \ \forall a \in D : \quad (a \neq 0 \Rightarrow x*a \in A)$
(vi) $\forall x \in S^* \ \forall a,b \in D : \quad (x*a = x*b \Rightarrow a = b)$

Beweis : (i) $\forall a \in D \forall s \in S : a+0\circ s = (s*a)\circ s + 0\circ s = (s*a + 0)\circ s$
$= (s*a)\circ s = a \quad \Rightarrow \forall s \in S : 0\circ s = 0 \Rightarrow 0 \in E$
(ii) $\forall s \in S : (e+e')\circ s = e\circ s + e'\circ s = 0 + 0 = 0$
(iii) $\forall s \in S : (a+e)\circ s = a\circ s + e\circ s = a\circ s + 0 = a\circ s \Rightarrow a+e = a$
(iv) Wäre $a+b \in E$, so wäre: $\forall s \in S : (a+b)\circ s = 0 = a\circ s + b\circ s$
$\Rightarrow a\circ s = b\circ s = 0 \Rightarrow a \in E \wedge b \in E$ (W!)
(v) Es genügt, diese und die nächste Beziehung für einfache Selektoren $s \in S$ zu zeigen : $(s*a)\circ s = a \neq 0 \Rightarrow s*a \in A$.
(vi) $(s*a)\circ s = (s*b)\circ s \Rightarrow a = b$

Satz 2.6 : $\forall x \in S^* \ \forall a,b \in D$:
(i) $(a + b)\circ x = a\circ x + b\circ x$
(ii) $x*(a + b) = x*a + x*b$

Beweis: (i) ist trivial. Bei (ii) genügt es, die Gleichheit für $x = s \in S$ zu zeigen: ist $a=0$, so ist $s*(a+b) = s*b = s*a + s*b$ wegen Ax3. Sei nun $a \neq 0$. Dann gilt für alle $t \in S$:

$$\begin{aligned}[s*(a+b)]\circ t &= (s=t \rightarrow a+b \ , \ T \rightarrow 0) \\ &= (s=t \rightarrow a \ , \ T \rightarrow 0) \ + \ (s=t \rightarrow b \ , \ T \rightarrow 0) \\ &= (s*a)\circ t \ + \ (s*b)\circ t \\ &= (s*a + s*b)\circ t\end{aligned}$$

Wegen Ax2, Satz 2.5 (v) und Satz 2.4 gilt: $a+b \neq 0 \Rightarrow s*(a+b) \in A$
$\Rightarrow s*(a+b) = s*a + s*b$.

Definition 2.7 : Zwischen Selektorworten $x,y \in S$ seien folgende Beziehungen erklärt:

$x \leq y \ :\Leftrightarrow \ \exists z \in S^* : \ xz = y$
In diesem Falle schreiben wir : $y-x := z$

$x < y \ :\Leftrightarrow \ x \leq y \wedge x \neq y$

$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ x \leq y \vee y \leq x$

$x \not\sim y \ :\Leftrightarrow \ \neg(x \sim y)$

Satz 2.8 : $\forall a \in D \quad \forall x,y \in S^*$:

$$(x*a)\circ y = (x \leq y \rightarrow a\circ(y-x) \ , \ y < x \rightarrow (x-y)*a \ , \ T \rightarrow 0)$$

Auf den einfachen Beweis soll hier verzichtet werden.

Satz 2.9 : $\forall a \in A$: $\quad a = \sum\limits_{s \in S} s*(a\circ s)$

Beweis: Für alle $t \in S$ ist

$$\Big[\sum_{s\in S} s*(a\circ s)\Big]\circ t = \sum_{s\in S} [s*(a\circ s)]\circ t = \sum_{s\in S}(s=t \rightarrow a\circ s \ , \ T \rightarrow 0)$$

$= a\circ t$. Aus Satz 2.4 folgt die Behauptung.

Die Verknüpfungen $+,\circ,*$ spiegeln sich in korrespondierenden Verknüpfungen der charakteristischen Mengen wider. Charakteristische Mengen haben folgende einfache Eigenschaften:

$$x \in \chi(a) \wedge y \leq x \Rightarrow y \in \chi(a)$$
$$\chi(0) = \emptyset$$
$$\forall e \in E-\{0\} : \chi(e) = \{\varepsilon\}$$

Wir referieren einige geläufige Operationen auf Wortmengen und führen Bezeichnungen ein: seien L , L_1 , $L_2 \subset S^*$. Die Ableitung von L nach einem Wort $x \in S^*$ ist

$$\partial_x(L) := \{ y \in S^* \mid \exists z \in L : \ xy = z \}$$

Das Komplexprodukt von L_1 und L_2 ist

$$L_1L_2 := \{ x_1x_2 \mid x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2 \}$$

Statt $\{x\}L$ schreiben wir auch xL. Die Präfixmenge von L ist

$$L^{\#} := \{ x \in S^* \mid \exists y \in L : \ x \leq y \}$$

Statt $\{x\}^{\#}$ schreiben wir auch $x^{\#}$.

Satz 2.1o : $\forall a,b \in D \ \forall x \in S^*$:

$$\text{(i)} \quad \chi(a+b) = \chi(a) \cup \chi(b)$$
$$\text{(ii)} \quad \chi(a\circ x) = \partial_x(\chi(a))$$
$$\text{(iii)} \quad \chi(x*a) = [x\,\chi(a)]^{\#}$$

Beweis: (i) $x \in \chi(a+b) \Leftrightarrow (a+b)\circ x \neq 0 \Leftrightarrow a\circ x + b\circ x \neq 0$
$\Leftrightarrow a\circ x \neq 0 \vee b\circ x \neq 0 \Leftrightarrow x \in \chi(a) \vee x \in \chi(b)$

(ii) $y \in \chi(a \circ x) \Leftrightarrow (a \circ x) \circ y \neq 0 \Leftrightarrow a \circ xy \neq 0 \Leftrightarrow xy \in \chi(a) \Leftrightarrow y \in \partial_x(\chi(a))$

(iii) $y \in \chi(x * a) \Leftrightarrow (x * a) \circ y \neq 0 \Leftrightarrow (x \leq y \wedge a \circ (y-x) \neq 0) \vee (y < x \wedge (x-y) * a \neq 0)$. Für $a=0$ ist die Aussage des Satzes trivialerweise richtig. Sei $a \neq 0$. Dann läßt sich die obige Äquivalenz fortsetzen:
$\Leftrightarrow (y < x) \vee (x \leq y \wedge a \circ (y-x) \neq 0) \Leftrightarrow y \in x^{\#} \vee (y = xz \wedge z \in \chi(a))$
$\Leftrightarrow y \in x^{\#} \cup x\chi(a) \Leftrightarrow y \in [x\chi(a)]^{\#}$.

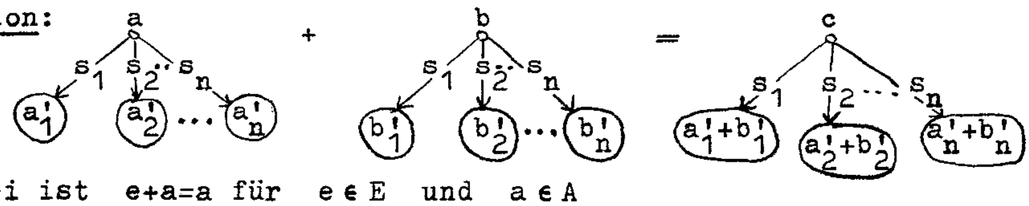
3. Beispiele für Objekt-Algebren

Wir geben drei Beispiele : Wurzelbäume endlichen Grades mit markierten Kanten und Blättern, Familien von Präfix-Sprachen, die gegenüber den Operationen $\cup$, ∂_s, $[s\ ]^{\#}$ abgeschlossen sind, und ein etwas komplizierteres algebraisches Beispiel.

3.1 Wurzelbäume. Sei $(E,+,0)$ ein Monoid, welches das Ax2 erfüllt. Dann ist $(E-\{0\}, +)$ eine Unter-Halbgruppe, und deren Elemente sollen Markierungen für die Blätter der Bäume sein. Bäume, welche nur aus der (markierten) Wurzel bestehen, identifizieren wir mit der Markierung $e \in E-\{0\}$, und das Nullelement 0 identifizieren wir mit dem leeren Baum. Die Kanten seien mit "Selektoren" $s \in S$, $|S| < \infty$, markiert, wobei die von einem Knoten ausgehenden Kanten alle verschieden markiert sein sollen.

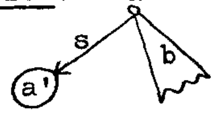
Sei D_B die Menge aller (endlichen und unendlichen) Wurzelbäume endlichen Grades mit derartigen Markierungen aus festen Mengen E und S, und sei A die Menge der Bäume mit mindestens zwei Knoten. Auf D_B führen wir folgende Verknüpfungen ein:

1. Addition:



Dabei ist $e+a=a$ für $e \in E$ und $a \in A$

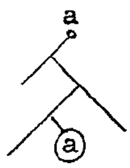
2. Selektion: $a \circ s = a'$



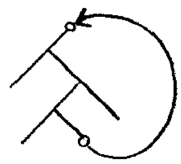
<u>3. Konstruktion:</u> $s * a =$ 

Dann genügt $\Omega_B = (D_B, S, +, \circ, *, 0)$ den Axiomen für eine Objekt-Algebra, wie man leicht nachprüft.

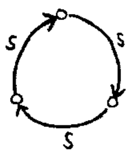
Ist $a \circ x = a$ für einen Baum a und ein Selektorwort $x \neq \varepsilon$, so ist a ein unendlicher Baum mit "Periode" x. Bäume mit Perioden können auch durch Graphen mit Zyklen dargestellt werden, z.B.



durch



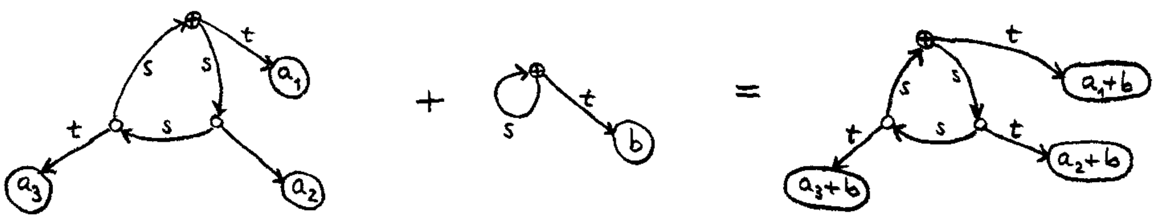
Diese Darstellung ist nicht eindeutig, denn z.B. stellen



und

dasselbe Objekt dar, nämlich den Baum 

mit der Periode s und $a \circ t = 0$ für $t \neq s$. Jeder endliche Graph mit ausgezeichnetem "Wurzelknoten" bestimmt aber auf eindeutige Weise einen Baum mit evtl. Perioden, so daß wir ggf. von der Zyklen-Darstellung Gebrauch machen. So ist z.B.



<u>*3.2 Präfix-Sprachen:*</u> *Eine Präfix-Sprache über S ist eine Sprache* $L \subset S^*$ mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in S^* : \quad xy \in L \Rightarrow x \in L$$

Jede Familie $\mathcal{L}$ von Präfix-Sprachen, die gegenüber den folgenden Operationen abgeschlossen ist, ist eine Objekt-Algebra:

$$L_1 + L_2 \quad := \quad L_1 \cup L_2$$

$$L \circ x \quad := \quad \partial_x(L)$$

$$x * L \quad := \quad [xL]^{\#}$$

Hier ist speziell $E = \{\{\varepsilon\}, \emptyset\}$ und $\chi(L) = L$.

Satz 2.1o zeigt, daß die Familie der charakteristischen Mengen von Objekten einer Objekt-Algebra wieder eine Objekt-Algebra bildet. Diese entspricht den Wurzelbäumen ohne Blattmarkierungen.

3.3 Ein algebraisches Beispiel. Sei $\vartheta=(D,+,0)$ ein kommutatives Monoid mit der Eigenschaft

$$(1)\quad \forall a,b\in D:\quad a+b=0 \;\Rightarrow\; a=b=0$$

Sei S eine Menge von Endomorphismen von ϑ, welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$(2)\quad \forall a\in D\ \forall s\in S:\quad a\neq 0 \Rightarrow s^{-1}(a)\cap \bigcap_{t\in S-\{s\}} \mathrm{Kern}(t) \neq \emptyset$$

Dann können wir eine Faktorstruktur $\vartheta/\equiv$ zu einer Objekt-Algebra machen. Dazu sei S^{τ} der Abschluß von S bzgl. der Komposition, und zu $a\in D$ sei

$$(3)\quad \Theta(a) := \{\, x\in S^{\tau} \mid a\notin \mathrm{Kern}(x)\,\}$$

Wegen (1) gilt:

$$(4)\quad \Theta(a+b) = \Theta(a)\cup\Theta(b)$$

Sei

$$(5)\quad E := \bigcap_{s\in S} \mathrm{Kern}(s)$$

Offenbar ist $0\in E$. Sei ferner zu $a\in D$

$$(6)\quad \Theta_E(a) := \{\, x\in S^{\tau} \mid x(a)\in E-\{0\}\,\}$$

Dann ist $\Theta_E(a)\subset\Theta(a)$, und es gilt:

$$(7)\quad \Theta(a)=\Theta(b) \;\Rightarrow\; \Theta_E(a)=\Theta_E(b)$$

Wir führen eine Kongruenzrelation $\equiv$ auf D ein:

$$(8)\quad \forall a,b\in D:\quad a\equiv b \;:\Leftrightarrow\; \Theta(a)=\Theta(b)\wedge \forall x\in\Theta_E(a): x(a)=x(b)$$

Daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus (7), und daß $\equiv$ eine Kongruenz ist, folgt aus (4) und der Tatsache, daß alle $x\in S^{\tau}$ Endomorphismen sind.

Für alle $e\in E$ ist $\Theta(e)=\Theta_E(e)=\{id\}$. Alle Kongruenzklassen sind also auf E einelementig. Insbesondere gilt also: $a\equiv 0 \Rightarrow a=0$. Die Elemente der Menge

$$(9)\quad c(s,a) := s^{-1}(a)\cap \bigcap_{t\in S-\{s\}} \mathrm{Kern}(t)$$

sind für jedes $a\in D$ und $s\in S$ paarweise kongruent, liegen also in einer Kongruenzklasse.

Daraus folgt, daß $\Omega = (D/\equiv, S, +, \circ, *, 0)$ eine Objekt-Algebra ist, wenn wir die Verknüpfungen $\circ$ und $*$ folgendermaßen definieren:

$$[a]\circ s := [s(a)]$$
$$s * [a] := [c] \quad \text{mit} \quad c \in c(s,a)$$

Hierbei bezeichnet $[a]$ die Klasse von $D/\equiv$, in der a liegt.

4. Stamm-Darstellung von Objekten

Jedes Objekt a läßt sich als endliche Summe von Termen der Form $x*(a\circ x)$ darstellen, und es läßt sich erreichen, daß jedes vorgegebene Wort $x \in \chi(a)$ in einem Term dieser Summe vorkommt. Diese Darstellung wird benötigt, um im nächsten Abschnitt die Verknüpfung der Amputation einzuführen.

Definition 4.1 : Eine Menge $X \subset S^*$ heißt unabhängig genau dann, wenn gilt: $X \cap XS^+ = \emptyset$.

X ist genau dann unabhängig, wenn für alle $x,y \in X$ gilt: $x \neq y \Rightarrow x \not< y$. Zu $X \subset S^*$ und $a \in D$ sei $X_a := X \cap \chi(a)$.

Definition 4.2 : Eine Menge $X \subset S^*$ heißt Stamm eines Objektes $a \in D$ genau dann, wenn gilt:

(i) X ist unabhängig

(ii) $|X_a| < \infty$

(iii) $\sum_{x \in X} x*(a\circ x) = a$

In der Interpretation als Wurzelbaum ist ein Stamm ein endliches Präfix des Baumes (gegeben durch die Menge der "Stammblätter"), so daß jeder Weg von der Wurzel des Baumes zu einem seiner Knoten entweder im Stamm liegt oder diesen über eines seiner Blätter verläßt.

Satz 4.3 : Sei X ein Stamm von a, und sei $y \in S^*$. Dann gilt:

(1) falls $y \in X^\#$, so ist $\partial_y(X)$ ein Stamm von $a\circ y$

(2) yX ist ein Stamm von $y*a$

<u>Beweis</u>: (1,i) $X \cap XS^+ = \emptyset \Rightarrow \partial_y(X \cap XS^+) = \partial_y(X) \cap \partial_y(XS^+) = \emptyset$
Wegen $\partial_y(X)S^+ \subset \partial_y(XS^+)$ ist auch $\partial_y(X) \cap \partial_y(X)S^+ = \emptyset$. Also ist $\partial_y(X)$ unabhängig.
(1,ii) $|X_a| < \infty \Rightarrow |\partial_y(X_a)| < \infty$. Nun ist $\partial_y(X_a) = \partial_y(X \cap \chi(a))$
$= \partial_y(X) \cap \partial_y(\chi(a)) = \partial_y(X) \cap \chi(a\circ y) = [\partial_y(X)]_{a\circ y}$.
(1,iii) $a\circ y = \sum_{x\in X} [x*(a\circ x)]\circ y$. Wegen $y \in X^\#$ folgt mit Satz 2.8:

$$a\circ y = \sum_{yz\in X} z*(a\circ yz) = \sum_{z\in \partial_y(X)} z*((a\circ y)\circ z)$$

(2,i) $X \cap XS^+ = \emptyset \Rightarrow y(X \cap XS^+) = \emptyset \Rightarrow yX \cap yXS^+ = \emptyset$
(2,ii) $yX_a = y(X \cap \chi(a)) = yX \cap y\chi(a) = yX \cap \chi(y*a) = [yX]_{y*a}$
(2,iii) $y*a = \sum_{x\in X} y*x*(a\circ x) = \sum_{x\in X} yx*((y*a)\circ yx) = \sum_{z\in yX} z*((y*a)\circ z)$

Der folgende Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß X ein Stamm von a ist.

<u>Satz 4.4</u>: Seien $X \subset S^*$ und $a \in D$. X ist genau dann ein Stamm von a, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) X ist unabhängig
(ii) $|X_a| < \infty$
(iii) $\chi(a) \subset X_a^\# \cup X_a S^*$

<u>Beweis</u>: Sei X ein Stamm von a . Dann ist im Falle a=0 $\chi(a)=\emptyset$, und (iii) ist erfüllt. Im Falle $a \in E-\{0\}$ ist $\chi(a) = \{\varepsilon\} \subset X_a^\#$, da $X \neq \emptyset$ sein muß. Seien nun $a \in A$ und $y \in \chi(a)$. Dann ist $a\circ y \neq 0$, und es folgt:

$$[\sum_{x\in X} x*(a\circ x)]\circ y = [\sum_{x\in X_a} x*(a\circ x)]\circ y = \sum_{x\in X_a} [x*(a\circ x)]\circ y \neq 0$$

Damit gibt es ein $x \in X_a$, so daß gilt: $(x*(a\circ x))\circ y \neq 0$, also $x \sim y$. Daraus folgt: $y \in X_a^\# \cup X_a S^*$.

Sei umgekehrt $X \subset S^*$ so gegeben, daß die Bedingungen (i) bis (iii) erfüllt sind. Für a=0 ist X trivialerweise ein Stamm von a. Für $a \in E-\{0\}$ ist wegen (iii) $X_a \neq \emptyset$. Da $\chi(a) = \{\varepsilon\}$ ist, ist dann $\varepsilon \in X$, also ist X ein Stamm von a. Sei nun $a \in A$ und $s \in S$. Dann gilt:

$$b := [\sum_{x\in X_a} x*(a\circ x)]\circ s = \sum_{x\in X_a} [x*(a\circ x)]\circ s$$

$$= \sum_{x \leq s} (a \circ x) \circ (s-x) \quad + \sum_{s < x} (x-s) * [(a \circ s) \circ (x-s)]$$

Da X unabhängig ist, ist $X = \{\varepsilon\}$ oder $\varepsilon \notin X$. Der erstere Fall ist trivial. Im letzteren ist eine der beiden Summen 0 :

1. Fall: $s \in X_a \Rightarrow b = a \circ s$

2. Fall: $s \notin X_a \qquad b = \sum_{z \in \partial_s(X_a)} z * [(a \circ s) \circ z]$

Ist $s \notin \chi(a)$, so ist im zweiten Fall die Summe 0. Andernfalls ist $s \in X^{\#}$, und nach Satz 4.3 (1) ist $\partial_s(X_a)$ Stamm von $a \circ s$. Damit und mit Satz 2.9 läßt sich der Satz durch vollständige Induktion nach der maximalen Wortlänge von X_a beweisen.

Jedes Objekt hat einen Stamm: Stamm von 0 ist jede unabhängige Menge $X \subset S^*$, und Stamm von $a \neq 0$ ist $\{\varepsilon\}$. Ferner ist $a \in A_o$ genau dann, wenn S ein Stamm von a ist, und die elementaren Objekte $e \in E - \{0\}$ sind genau diejenigen, deren einziger Stamm $\{\varepsilon\}$ ist.

Satz 4.5 : Seien $a \in D$ und $x \in \chi(a)$. Dann gibt es einen Stamm X von a mit $x \in X$.

Beweis: Der Fall $a \in E$ ist trivial. Sei $a \in A$, und sei $x = x_1 \dots x_n$, $x_i \in S$ für $i=1,\dots,n$. Sei $x^{(i)}$ das Präfix $x_1 \dots x_i$ von x, $0 \leq i \leq n$, $x^{(o)} = \varepsilon$. Dann ist

$$X := \{x\} \cup \bigcup_{i=o}^{n-1} x^{(i)}(S - \{x_{i+1}\})$$

ein Stamm von a .

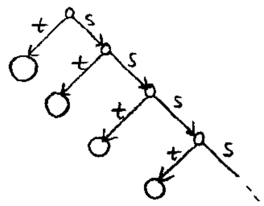
Durch einfache Mengenkalkulationen beweist man den folgenden Satz:

Satz 4.6 : Ist X ein Stamm sowohl von a als auch von b, so ist X auch ein Stamm von a+b .

Mengen von Objekten mit gemeinsamem Stamm bilden also ein Unter-Monoid von ϑ .

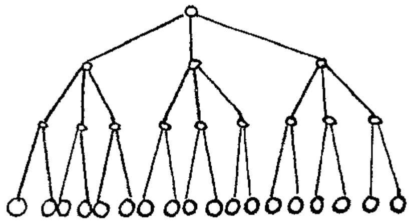
Beispiele für Mengen von Objekten mit gleichem Stamm:

1.) s^*-t-Listen sind alle Objekte mit dem Stamm s^*t :



Ist l eine s^*-t-Liste, so ist $l \circ s^{i-1} t$ das <u>i-te Listenelement.</u>

2.) <u>Arrays</u> der Dimension n und dem Indexbereich S_i ,i=1,...,n , für die i-te Komponente sind alle Objekte mit einem Stamm $S_1 S_2 \ldots S_n$.



Ist A ein Array und $x_i \in S_i$, so ist das Array-Element $A[x_1,\ldots,x_n]$ beschrieben durch $A \circ x_1 \ldots x_n$.

5. Amputation

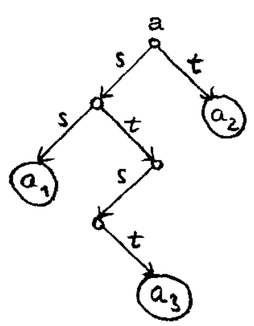
Mit Hilfe der Verknüpfungen +,∘ und ∗ wird eine weitere Verknüpfung von $S^* \times D$ in D eingeführt: die Amputation.

<u>Definition 5.1</u> : Seien $a \in D$ und $x \in S^*$, und sei $X \subset S^*$ ein Stamm von a mit $x \in X$, falls $x \in \mathcal{X}(a)$. Dann ist die <u>Amputation</u> a/x <u>von a nach x</u> definiert durch

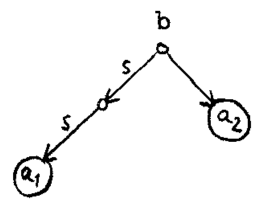
$$a/x \quad := \sum_{y \in X - \{x\}} y * (a \circ y)$$

Unmittelbar aus der Definition ergeben sich einige einfache Eigenschaften der Amputation: $0/x = 0$, $a \circ x = 0 \Rightarrow a/x = a$, $a/\varepsilon = 0$, $a = a/x + x*(a \circ x)$ für alle $a \in D$ und alle $x \in S^*$. Ferner gilt: $a \in E \Rightarrow a = a/x$; $a \in A \Rightarrow a/x \in A_o$.

In der Wurzelbaum-Interpretation bedeutet a/x das "Abschneiden" des Unterbaums $a \circ x$ von a. Dabei verschwindet der x-Zweig vom Ende her bis zur letzten Abzweigung, z.B.



/ sts =



Bei diesem Beispiel ist $a/st = a/sts = a/stst$.

Daß die Definition der Amputation unabhängig ist von der speziellen Wahl des Stamms X, folgt aus dem folgenden Satz durch vollständige Induktion nach der Länge von x.

Satz 5.2 : Seien $a \in D$ und $x,y \in S^*$. Dann gilt :

$$a/xy = a/x + x*(a\circ x / y)$$

Beweis: Der Fall $a\in E$ ist trivial. Sei $a\in A$. Ist $a\circ xy = 0$, so ist $a/xy = a$, und es ist $a\circ x/y = a\circ x$, d.h. der Satz gilt. Sei nun $a\circ xy \neq 0$. Dann ist auch $a\circ x \neq 0$, d.h. $x \in \chi(a)$ und $y \in \chi(a\circ x)$. Dann gibt es Stämme X von a und Y von $a\circ x$ mit $x\in X$ und $y\in Y$. Wie man leicht sieht, ist dann auch $Z := (X-\{x\}) \cup xY$ ein Stamm von a, und es ist $z:=xy \in Z$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
a/x + x*(a\circ x/y) &= \sum_{x'\in X-\{x\}} x'*(a\circ x') + x* \sum_{y'\in Y-\{y\}} y'*((a\circ x)\circ y') \\
&= \sum_{x'\in X-\{x\}} x'*(a\circ x') + \sum_{xy'\in xY-\{xy\}} xy'*(a\circ xy') \\
&= \sum_{z'\in Z-\{z\}} z'*(a\circ z') \\
&= a/xy
\end{aligned}$$

Der nächste Satz folgt unmittelbar aus Definition 5.1 und Satz 2.6 .

Satz 5.3 : $\forall x \in S^* \; \forall a,b \in D : \quad (a + b) / x = a/x + b/x$

Im folgenden Satz werden die Beziehungen der Amputation zu den anderen Verknüpfungen, Selektion und Konstruktion, geklärt.

Satz 5.4 : Seien $a \in D$ und $x,y \in S^*$. Dann gilt :

(i) $(a/x)\circ y = (x \leq y \rightarrow 0 \;,\; y < x \rightarrow (a\circ y)/(x-y) \;,\; T \rightarrow a\circ y)$

(ii) $(x*a)/y = (x < y \rightarrow x*(a/(y-x)) \;,\; y \leq x \rightarrow 0 \;,\; T \rightarrow x*a)$

Beweis: (i) Die Fälle $x=\varepsilon$ oder $y=\varepsilon$ sind trivial. Seien $x,y \neq \varepsilon$. Ist $a\circ x=0$, so ist $(a/x)\circ y = a\circ y$, was der Aussage des Satzes entspricht. Seien nun $x,y \neq \varepsilon$ und $x \in \mathcal{X}(a)$. Dann gibt es einen Stamm X von a mit $x \in X$, und es gilt:

$$b := (a/x) \circ y = \Big[\sum_{x' \in X - \{x\}} x' * (a \circ x') \Big] \circ y = \sum_{x' \in X - \{x\}} \big[x' * (a \circ x') \big] \circ y$$

Aus Satz 2.8 folgt:

$$b = \sum_{x' \in X - \{x\}} (x' \leq y \rightarrow (a \circ x') \circ (y - x') \;,\; y < x' \rightarrow (x' - y) * (a \circ x') \;,\; T \rightarrow 0)$$

$$= \sum_{\substack{x' \in X - \{x\} \\ x' \leq y}} a \circ y \;+\; \sum_{\substack{x' \in X - \{x\} \\ y < x'}} (x' - y) * \big[(a \circ y) \circ (x' - y) \big]$$

Ist $x \leq y$, so sind wegen der Unabhängigkeit von X alle x' unabhängig von y, d.h. beide Summen sind leer, und es ist $(a/x) \circ y = 0$.

Ist $y < x$, so ist aus dem gleichen Grunde die erste Summe leer, d.h. es gilt:

$$(a/x) \circ y = \sum_{z' \in Z - \{z\}} z' * \big[(a \circ y) \circ z \big] \quad \text{mit} \quad Z = \partial_y(X) \;,\; z = x - y$$

Nach Satz 4.3 ist Z ein Stamm von $a \circ y$, und es ist $z \in Z$. Daraus folgt: $(a/x) \circ y = (a \circ y)/(x - y)$.

Ist schließlich $x \not\sim y$, so ist nach Satz 2.8 $(x * (a \circ x)) \circ y = 0$, und es ist

$$(a/x) \circ y = \Big[\sum_{x' \in X - \{x\}} x' * (a \circ x') \Big] \circ y = \Big[\sum_{x' \in X} x' * (a \circ x') \Big] \circ y$$

$$= a \circ y \qquad \text{(Satz 4.4)}$$

(ii) Die Fälle $x = \varepsilon$ oder $y = \varepsilon$ sind wiederum trivial. Seien $x,y \neq \varepsilon$. Ist $(x * a) \circ y = 0$, so ist $(x * a)/y = x * a$, was der Aussage des Satzes entspricht; denn $x < y \Rightarrow a \circ (y - x) = 0 \Rightarrow a/(y - x) = a$, und $y \leq x \Rightarrow a = 0$. Sei nun $y \in \mathcal{X}(x * a)$. Dann gibt es einen Stamm Y von $x * a$ mit $y \in Y$, und es gilt:

$$(x * a)/y = \sum_{y' \in Y - \{y\}} y' * \big[(x * a) \circ y' \big]$$

$$= \sum_{y' \in Y - \{y\}} y' * (x \leq y' \rightarrow a \circ (y' - x) \;,\; y' < x \rightarrow (x - y') * a \;,\; T \rightarrow 0)$$

$$= \sum_{\substack{y' \in Y - \{y\} \\ x \leq y'}} y' * \big[a \circ (y' - x) \big] + \sum_{\substack{y' \in Y - \{y\} \\ y' < x}} y' * \big[(x - y') * a \big]$$

$$= x * \sum_{\cdot/\cdot} (y' - x) * \big[a \circ (y' - x) \big] + \sum_{\cdot/\cdot} x * a$$

Ist $x < y$, so ist wegen der Unabhängigkeit von Y die zweite Summe leer, und wir erhalten:

$$(x*a)/y = x * \sum_{z' \in Z-\{z\}} z'*(a \circ z') \quad \text{mit} \quad Z = \partial_x(Y) \quad \text{und} \quad z=y-x$$

Nach Satz 4.3 ist Z ein Stamm von $(x*a)\circ x = a$, woraus folgt:

$$(x*a)/y = x*(a/(y-x))$$

Ist $y \not\sim x$, so ist $(x*a)\circ y = 0$ nach Satz 2.8, woraus folgt:

$$(x*a)/y = x*a$$

Ist $y \leq x$, so sind beide Summen leer, und es ist $(x*a)/y = 0$.

<u>Korollar 5.5</u> : $\forall a \in D \ \forall x,y \in S^* : \ a/x = a/xy/x$

<u>Beweis</u>: Ist $a\circ x=0$, so ist $a\circ xy=0$, und die Gleichheit stimmt. Sei nun $x \in \chi(a)$. Dann gibt es einen Stamm X von a mit $x \in X$. Da X eine unabhängige Menge ist, ist $xy \not\sim x'$ für alle $x' \in X$ mit $x' \neq x$. Aus Satz 5.4 folgt dann: $(a/xy)\circ x' = a\circ x'$, und es gilt:

$$\begin{aligned} a/x &= \sum_{x' \in X-\{x\}} x'*(a\circ x') \\ &= \sum_{x' \in X-\{x\}} x'*\left[(a/xy)\circ x'\right] \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß X auch ein Stamm von a/xy ist.

<u>Korollar 5.6</u> : $\forall s,t \in S \ \forall a,b \in D$:

$$s \neq t \wedge a/s = b/s \wedge a/t = b/t \Rightarrow a = b$$

<u>Beweis:</u> $a \in E \Rightarrow a/s = a = b/s = b$.

$a \in A \Rightarrow (a/s)\circ t = (b/s)\circ t \Rightarrow a\circ t = b\circ t$

$(a/t)\circ s = (b/t)\circ s \Rightarrow a\circ s = b\circ s$

Falls dies für alle $s \neq t$ gilt, ist $a\circ s = b\circ s$ für alle $s \in S$, und aus Satz 2.4 folgt : $a = b$.

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist es, die Wirkung der Amputation auf die charakteristischen Mengen zu untersuchen. Dazu führen wir eine Äquivalenzrelation auf S ein, welche anschaulich folgendes bedeutet: x und x' sollen genau dann äquivalent sein, wenn $x \sim x'$, etwa $x \leq x'$, ist, und wenn auf dem Weg von $a\circ x$ bis $a\circ x'$ keine Abzweigung vorkommt. Genau dann ist $a/x = a/x'$.

Definition 5.7 : Zu jedem Objekt $a \in D$ sei die Relation ρ_a auf S^* folgendermaßen erklärt:

$$x \, \rho_a \, x' \;:\Leftrightarrow\; \forall y \in \chi(a) : y \sim x \Leftrightarrow y \sim x'$$

Man sieht leicht, daß ρ_a eine Äquivalenzrelation ist, und daß die Einschränkung von ρ_a auf $\chi(a)$ eine Verfeinerung von $\sim$ ist, d.h. : $x \, \rho_a \, x' \Rightarrow x \sim x'$ für alle $x, x' \in \chi(a)$.

Satz 5.8 : $\forall a \in D \; \forall x, x' \in \chi(a)$:

$$x \, \rho_a \, x' \Leftrightarrow \chi(x*(a\circ x)) = \chi(x'*(a\circ x'))$$

Beweis: $\Rightarrow$) $y \in \chi(x*(a\circ x)) \Leftrightarrow y \sim x \wedge y \in \chi(a)$

$$y \sim x' \wedge y \in \chi(a) \Leftrightarrow y \in \chi(x'*(a\circ x'))$$

$\Leftarrow$) $y \sim x \wedge y \in \chi(a) \Leftrightarrow y \in \chi(x*(a\circ x)) \Leftrightarrow y \in \chi(x'*(a\circ x'))$

$\Leftrightarrow y \sim x' \wedge y \in \chi(a)$

Satz 5.9 : Sei $a \in D$ und $x \in \chi(a)$. Sei $\hat{x}$ das kürzeste Wort in der Äquivalenzklasse von x bzgl. ρ_a . Dann gilt:

$$\chi(a/x) = \chi(a) - \hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a))$$

Beweis: Wegen $a = a/x + x*(a\circ x)$ ist $\chi(a) = \chi(a/x) \cup \chi(x*(a\circ x))$. Für $a/x=0$ ist der Satz richtig. Sei nun $a/x \neq 0$. Da für $y \geq x$ $y \notin \chi(a/x)$ ist (Satz 5.4), und da für alle $y \in \chi(x*(a\circ x))$ gilt: $y \geq x$ oder $y \in x^{\#}$, ist

$$\chi(a/x) \cap \chi(x*(a\circ x)) = \tilde{x}^{\#}$$

für das maximale Präfix $\tilde{x}$ von x, welches auch Präfix eines anderen Wortes $y \in \chi(a)$, $y \not\sim x$, ist . Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\chi(a/x) &= \chi(a) - (\chi(x*(a\circ x)) - \tilde{x}^{\#}) \\ &= \chi(a) - (\chi(\hat{x}*(a\circ\hat{x})) - \tilde{x}^{\#}) \\ &= \chi(a) - ((\hat{x}^{\#} \cup \hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a))) - \tilde{x}^{\#})\end{aligned}$$

Da $\hat{x}=\tilde{x}s$ ist für ein $s \in S$, ist

$$\begin{aligned}\chi(a/x) &= \chi(a) - ((\hat{x}^{\#} - \tilde{x}^{\#}) \cup \hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a))) \\ &= \chi(a) - (\{\hat{x}\} \cup \hat{x}\partial_{\hat{x}}(\chi(a))) \\ &= \chi(a) - \hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a)) \quad , \text{ da } \hat{x} \in \chi(a) \text{ ist.}\end{aligned}$$

6. Der μ - Operator

Mit Hilfe der zweistelligen Operationen +, * und / kann die dreistellige μ-Operation von $D \times S^* \times D$ in D eingeführt werden, die bei der Wiener Methode eine große Rolle spielt:

Definition 6.1 : $\forall x \in S^* \ \forall a,b \in D : \mu(a,x,b) := a/x + x*b$

Anschaulich bedeutet dies, den Unterbaum $a \circ x$ von a durch den Baum b zu ersetzen. Unmittelbar aus der Definition und aus den Sätzen 2.9 und 5.4 ergibt sich:

Satz 6.2 : $\forall x,y \in S^* \ \forall a,b \in D$:

$$\mu(a,x,b) \circ y = (x \leq y \rightarrow b \circ (y-x) \ , \ y < x \rightarrow \mu(a \circ y, x-y, b) \ , \ T \rightarrow a \circ y)$$

Die Operationen * und / sind Spezialfälle der μ-Operation:

$$x*a = \mu(0,x,a)$$
$$a/x = \mu(a,x,0)$$

Um die Wirkung der μ-Operation auf die charakteristische Menge zu formulieren, benötigen wir die Äquivalenzrelation ρ_a nicht.

Satz 6.3 : $\forall a,b \in D \ \forall x \in \chi(a)$:

$$b \neq 0 \Rightarrow \chi(\mu(a,x,b)) = (\chi(a) - x\,\partial_x(\chi(a))) \cup x\chi(b)$$

Beweis: $\mu(a,x,b) = a/x + x*b \implies$

$$\begin{aligned} \chi(\mu(a,x,b)) &= \chi(a/x) \cup \chi(x*b) \\ &= (\chi(a) - \hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a))) \cup \tilde{x}^{\#} \cup x\chi(b) \qquad , x=\tilde{x}s \\ &= (\chi(a) - (\hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a)) - \tilde{x}^{\#}) \cup x\chi(b) \end{aligned}$$

Aus der Definition des $\hat{x}$ (Satz 5.9) sieht man, daß
$\hat{x}\,\partial_{\hat{x}}(\chi(a)) - \tilde{x}^{\#} = x\,\partial_x(\chi(a))$ ist .

7. Endliche Objekte

Definition 7.1 : Ein Objekt $a \in D$ heißt endlich genau dann, wenn $|\chi(a)| < \infty$ ist.

Anschaulich entsprechen die endlichen Objekte gerade den endlichen Bäumen.

Sei D_e die Menge der endlichen Objekte aus D. Es ist klar, daß $\Omega_e := (D_e, S, +, \circ, *, 0)$ eine Unter-Algebra von Ω ist (vgl. Satz 2.1o)

Für eine Teilmenge $F \subset E$ von elementaren Objekten sei $\langle F \rangle$ das von F erzeugte Unter-Monoid von $\vartheta = (E,+,0)$, und für $G \subset D$ sei $[G]$ die von G erzeugte Unter-Objekt-Algebra von Ω, d.h. der Abschluß von G gegenüber +, $\circ x$ und $x*$ für alle $x \in S^*$.

Satz 7.2 : $\qquad \Omega_e = [E]$

Beweis: Daß $[E] \subset \Omega_e$ ist, folgt sofort aus der Tatsache, daß $E \subset D_e$ ist, und aus Satz 2.1o .

Um $\Omega_e \subset [E]$ zu zeigen, sei $a \in D_e$. Dann ist $|\chi_E(a)| < \infty$. Man prüft leicht nach, daß $\chi_E(a)$ ein Stamm von a ist (Satz 4.4). Daher haben endliche Objekte eine (eindeutige) Darstellung der Form

$$a = \sum_{x \in \chi_E(a)} x * e_x \quad , \quad e_x = a \circ x \in E$$

Der nächste Satz gibt eine vollständige Charakterisierung der Unter-Algebren von Ω_e : sie entsprechen gerade den Unter-Monoiden von (E,+,0).

Satz 7.3 : (i) Jede Unter-Algebra $\Omega' \subset \Omega_e$ ist von der Form $\Omega' = [F]$ für eine Teilmenge $F \subset E$.

(ii) Für alle Teilmengen $F_1, F_2 \subset E$ gilt:

$$\langle F_1 \rangle = \langle F_2 \rangle \iff [F_1] = [F_2]$$

Der Beweis ist einfach und wird hier nicht ausgeführt.

Daß endliche Objekte als endliche Bäume interpretiert werden können, zeigt der folgende Satz. Zunächst zwei Definitionen:

Definition 7.4 : Sei $a \in D$. Die Menge der von a erreichbaren Objekte ist

$$\omega(a) := \{ a \circ x \mid x \in \chi(a) \}$$

Definition 7.5 : Ein Objekt $a \in D$ heißt zirkulär genau dann, wenn es ein $x \in S^+$ gibt mit $a \circ x = a$.

Satz 7.6 : Ein Objekt $a \in D$ ist genau dann endlich, wenn kein Objekt aus $\omega(a)$ zirkulär ist, und wenn $|\omega(a)| < \infty$ ist .

Beweis: $\Rightarrow$) Wäre $b \circ y = b$ für ein $b \in \omega(a)$ und ein $y \in S^+$, so wäre $y^* \subset \chi(b)$. Da $b \in \omega(a)$ ist, gibt es ein $x \in S^*$ mit $a \circ x = b$. Dann wäre $xy^* \subset \chi(a)$ und somit $|\chi(a)| = \infty$. Daß mit $\chi(a)$ auch $\omega(a)$ endlich ist, ist klar.

$\Leftarrow$) Wäre a nicht endlich, so gäbe es ein Wort $x \in \chi(a)$ mit $lg(x) > |\omega(a)|$. Sei $x^\# = \{x_o, x_1, \ldots, x_p\}$, so daß gilt: $\varepsilon = x_o < x_1 < \ldots < x_p = x$. Dann ist $\{ a \circ x_i \mid i = 1, \ldots, p\} \subset \omega(a)$, woraus folgt: es gibt Indices j,k mit $a \circ x_j = a \circ x_k$ und $x_j < x_k$. Dann ist $a \circ x_j$ zirkulär.

Danksagung. Wesentliche Anregungen habe ich aus Gesprächen mit J.Mühlbacher, H.Ehrig und J.F.Perrot gewonnen. Ihnen gilt mein besonderer Dank.

Literatur

1. Lucas,P. - Lauer,P. - Stigleitner,H. : Method and notation for the formal definition of programming languages. Tech. Report TR 25.087, IBM Lab. Vienna, 1968, revised 1970

2. Mühlbacher,J.: Datenstrukturen. Vorlesungsunterlagen, Dortmund 1974

3. Neuhold, E.J. : The formal description of programming languages. IBM Systems J. 10 , no. 2, 1971, pp. 86-112

4. Neuhold, E.J. : Data mapping: a formal hierarchical and relational view, Bericht 10, Inst.f.Angew.Informatik, Universität Karlsruhe, Fakultät 12, Februar 1973

5. Ollongren, A.: A theory for the objects of the Vienna Definition Language. Tech. Report TR 25.123, IBM Lab. Vienna 1971

6. Wegner, P.: The Vienna Definition Language. Computing Surveys 4 , No.1, March 1972, pp. 7-63